図形と式では、文字通り円や直線などにまつわる図形を x, y の式で表したものを道具として扱います。場面に応じて適切な形のものを選べることと、交点や同点を求める際に自分で分かりやすい文字設定を心がけましょう。

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training297]

$2x+5y-3=0$，$3x-2y+1=0$ を連立して解くと　$x=\dfrac{1}{19}$，$y=\dfrac{11}{19}$

よって，2 直線 $2x+5y-3=0$，$3x-2y+1=0$ の交点の座標は　$\left(\dfrac{1}{19},\ \dfrac{11}{19}\right)$

点 $\left(\dfrac{1}{19},\ \dfrac{11}{19}\right)$ が直線 $x-ay+1=0$ 上にあるための条件は　$\dfrac{1}{19}-\dfrac{11}{19}a+1=0$

これを解いて　$a=\dfrac{20}{11}$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training299]

もう 1 つの頂点を S$(x,\ y)$ とする。平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わる。

[1]　四角形 PQRS が平行四辺形となるとき

線分 PR と線分 QS の中点が一致するから　$\dfrac{1+4}{2}=\dfrac{3+x}{2}$，$\dfrac{2+1}{2}=\dfrac{-2+y}{2}$

よって　$x=2$，$y=5$

[2]　四角形 PQSR が平行四辺形となるとき

線分PS と線分 QR の中点が一致するから　$\dfrac{1+x}{2}=\dfrac{3+4}{2}$，$\dfrac{2+y}{2}=\dfrac{-2+1}{2}$

よって　$x=6$，$y=-3$

[3]　四角形 PSQR が平行四辺形となるとき

線分 PQ と線分 SR の中点が一致するから　$\dfrac{1+3}{2}=\dfrac{x+4}{2}$，$\dfrac{2-2}{2}=\dfrac{y+1}{2}$

よって　$x=0$，$y=-1$　[1]～[3] から　$(2,\ 5)$，$(6,\ -3)$，$(0,\ -1)$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training309]

与えられた方程式を変形すると

$$(x+m)^2-m^2+\{y-(m+1)\}^2-(m+1)^2+3m^2-3m+5=0$$

よって　$(x+m)^2+\{y-(m+1)\}^2=-m^2+5m-4$

この方程式が円を表すための条件は　$-m^2+5m-4>0$

ゆえに　$(m-1)(m-4)<0$　　よって　$1<m<4$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training311]

条件より，円 C の中心の座標は，$(a,\ 1)$ $(a>0)$ とおける。

点 $(a,\ 1)$ と直線 $\sqrt{3}x-y=0$ の距離は 1 であるから　$\dfrac{|\sqrt{3}a-1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=1$

よって　$|\sqrt{3}a-1|=2$　　ゆえに　$\sqrt{3}a-1=\pm 2$

$a>0$ であるから　$a=\sqrt{3}$ よって，円 C の中心の座標は　$(\sqrt{3},\ 1)$　ℓ に垂直で,

点 $(\sqrt{3},\ 1)$ を通る直線の方程式は　$y-1=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})$　よって　$y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+2$

$y=\sqrt{3}x$，$y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+2$ から y を消去して　$\sqrt{3}x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+2$

ゆえに　$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ これを $y=\sqrt{3}x$ に代入して　$y=\dfrac{3}{2}$

よって，円 C と直線 ℓ の接点の座標は　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training313]

k を実数として，$x^2-6x+y^2-8y+k(x^2-2x+y^2-4y-7)=0$ …… ① とする。

方程式 ① は，与えられた２つの方程式が表す図形の，２つの交点を通る図形を表す。

① が直線になるのは $k=-1$ のときであるから，① に $k=-1$ を代入すると

$$x^2-6x+y^2-8y-(x^2-2x+y^2-4y-7)=0$$

整理すると　$4x+4y-7=0$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training321]

点Ｐの座標を $(s,\ t)$ とし，線分 AP を $1:2$ に内分する点を Q $(x,\ y)$ とすると

$$\frac{2\cdot0+1\cdot s}{1+2}=x,\quad \frac{2\cdot1+1\cdot t}{1+2}=y \qquad \text{すなわち} \qquad s=3x,\ t=3y-2$$

P$(s,\ t)$ は，直線 $y=2x-1$ 上の点であるから　$3y-2=2\cdot3x-1$

すなわち　$y=2x+\dfrac{1}{3}$　したがって，求める軌跡は　直線 $y=2x+\dfrac{1}{3}$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training323]

(1)　ℓ の方程式は　$y=a(x+1)$

ℓ と放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ が異なる２点で交わっているから，$\dfrac{1}{2}x^2=a(x+1)$　すなわち

$x^2-2ax-2a=0$ …… ① の判別式 D について　$D>0$

よって　$\dfrac{D}{4}=a^2+2a>0$　　ゆえに　$a(a+2)>0$

したがって　$a<-2,\ 0<a$

(2)　P$(p,\ a(p+1))$，Q$(q,\ a(q+1))$ とすると，R の座標は　$\left(\dfrac{p+q}{2},\ a\left(\dfrac{p+q}{2}+1\right)\right)$

$p,\ q$ は x の２次方程式 ① の解であるから，解と係数の関係により　$p+q=2a$

R の x 座標は　$\dfrac{p+q}{2}=a$　R の y 座標は　$a\left(\dfrac{p+q}{2}+1\right)=a(a+1)=a^2+a$

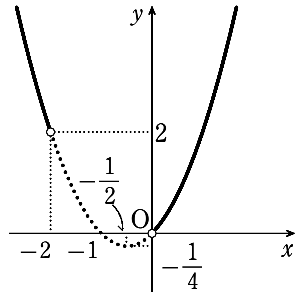
よって　R$(a,\ a^2+a)$

(3)　R$(x,\ y)$ とすると　$x=a,\ y=a^2+a$

a を消去すると　$y=x^2+x$

ここで，(1) から　$x<-2,\ 0<x$

よって，点 R の軌跡は右の図のようになる。

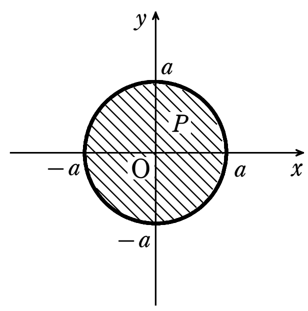


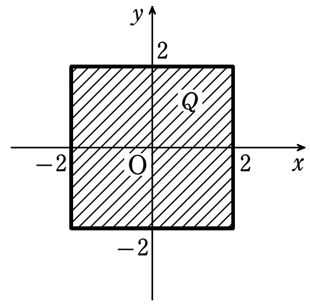
[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training325]

「$x^2+y^2\leqq a^2$」，「$x^2\leqq4$ かつ $y^2\leqq4$」の表す領域をそれぞれ P，Q とする。

$x^2\leqq4$ かつ $y^2\leqq4$ より　$-2\leqq x\leqq2$ かつ $-2\leqq y\leqq2$

よって，領域 P，Q は下の図の斜線部分である。　ただし，境界線を含む。

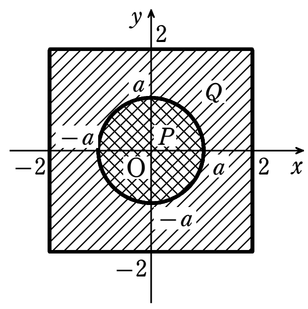




(1)　「$x^2+y^2\leqq a^2$」が「$x^2\leqq4$ かつ $y^2\leqq4$」であるための十分条件であるとき，$P\subset Q$ が成り立つ。

右の図から，a のとりうる値の範囲は

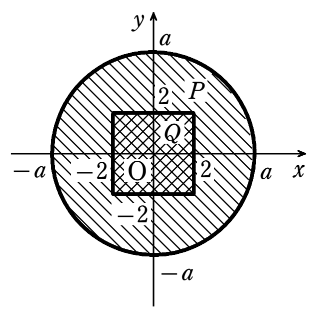
$0<a\leqq2$



(2)　「$x^2+y^2\leqq a^2$」が「$x^2\leqq4$ かつ $y^2\leqq4$」であるための必要条件であるとき，$P\supset Q$ が成り立つ。

これが成り立つには，点 $(2,\ 2)$ が領域 P に含まれればよいから　$2^2+2^2\leqq a^2$

$a>0$ であるから　$a\geqq2\sqrt{2}$



[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training335]

(1)　$\sin3\theta=\sin(2\theta+\theta)=\sin2\theta\cos\theta+\cos2\theta\sin\theta$

$$=(2\sin\theta\cos\theta)\cos\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta=2\sin\theta\cos^2\theta+\sin\theta-2\sin^3\theta$$

$$=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

(2)　(1) より　$\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=3\cdot\dfrac{1}{5}-4\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^3=\dfrac{71}{125}$