数学Ⅲ第７章
「積分法」その２６

「定積分と不等式パターン②」を攻略せよ

【例題】

次の不等式を証明せよ。ただし、nは自然数とする。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\log(n+1)$$

【例題】

次の不等式を証明せよ。ただし、nは自然数とする。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\log(n+1)$$

図を使って解決する

区分求積法のイメージに近い

【例題】

次の不等式を証明せよ。ただし、nは自然数とする。

$$\boxed{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} > \log(n+1)$$

足し算がいっぱい
ある方から関数を作る

【例題】

$y=\frac{1}{x}$のグラフを考える

yは単調減少である

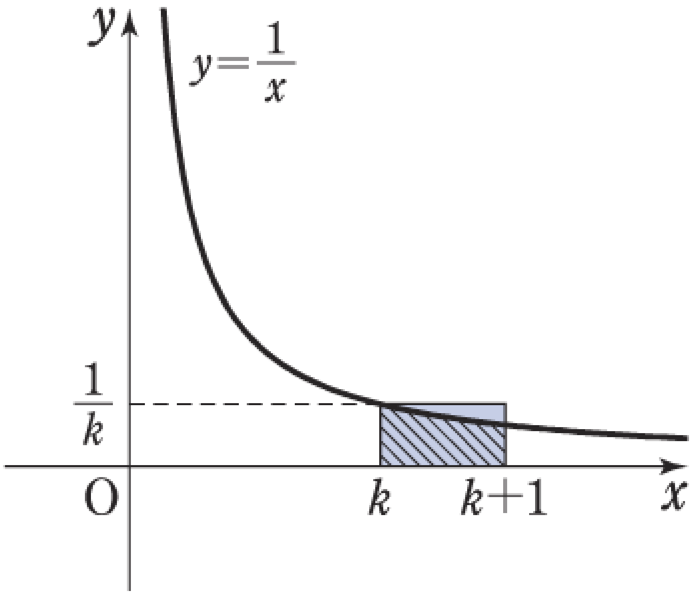
【例題】

$y = \frac{1}{x}$のグラフを考える

yは単調減少である

$k \leqq x \leqq k+1$の範囲で図のように長方形の面積と斜線部分の面積を比べると

$$1 \cdot \frac{1}{k} > \int_{k}^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$$



【例題】このページはメモです

$k=1$のとき　$1 > \int_1^2 \frac{1}{x}dx$

$k=2$のとき　$\frac{1}{2} > \int_2^3 \frac{1}{x}dx$

$k=3$のとき　$\frac{1}{3} > \int_3^4 \frac{1}{x}dx$

$\vdots$

$k=n$のとき　$\frac{1}{n} > \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx$

【例題】メモの内容から

$k=1,2,3,\cdots,n$を代入して、辺々を足すと

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$>\int_1^2\frac{1}{x}dx+\int_2^3\frac{1}{x}dx+\int_3^4\frac{1}{x}dx+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$$

【例題】メモの内容から

$k=1,2,3,\cdots,n$を代入して、辺々を足すと

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$>\int_1^{\boxed{2}}\frac{1}{x}dx+\int_{\boxed{2}}^{\boxed{3}}\frac{1}{x}dx+\int_{\boxed{3}}^{\boxed{4}}\frac{1}{x}dx+\cdots+\int_{\boxed{n}}^{n+1}\frac{1}{x}dx$$

数字が同じだと
性質から連結可能だから…

【例題】メモの内容から

$k = 1, 2, 3, \cdots, n$を代入して、辺々を足すと

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$> \int_1^2 \frac{1}{x}dx + \int_2^3 \frac{1}{x}dx + \int_3^4 \frac{1}{x}dx + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \boxed{\int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx}$$

右辺はすべて
連結した

【例題】

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}dx$$

【例題】

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}dx$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>[\log x]_{1}^{n+1}$$

【例題】

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}dx$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>[\log x]_{1}^{n+1}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\log(n+1)$$

【練習タイム】

教科書の練習３１をやってみよう

答えは次のページ

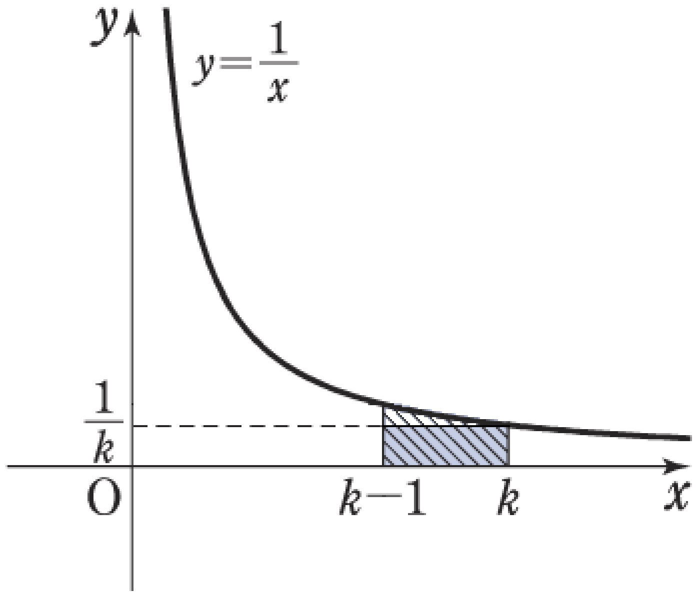
【答え】

$y=\frac{1}{x}$のグラフを考える

yは単調減少である

$k-1\leqq x\leqq k$の範囲で図のように長方形の面積と斜線部分の面積を比べると

$$1\cdot\frac{1}{k}<\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx$$



【答え】メモの内容から

$k=2,3,\cdots,n$を代入して、辺々を足すと

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$>\int_1^2\frac{1}{x}dx+\int_2^3\frac{1}{x}dx+\int_3^4\frac{1}{x}dx+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\int_1^n\frac{1}{x}dx$$

【答え】

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>[\log x]_1^n$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\log n$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>1+\log n$$

両辺1足す

【課題】

４STEPの

４３６、４３７

をやりましょう