数学Ⅲ第７章
「積分法」その２６

「定積分と不等式パターン①」を攻略せよ

【公式】あとで簡単に解説します

区間$[a,\ b]$で$f(x) \geqq g(x)$ならば

$$\int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$$

等号成立は、常に$f(x) = g(x)$であるときに限る

【公式】

区間$[a,\ b]$で$f(x) \geqq g(x)$ならば

$$\int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$$

どういうこと？

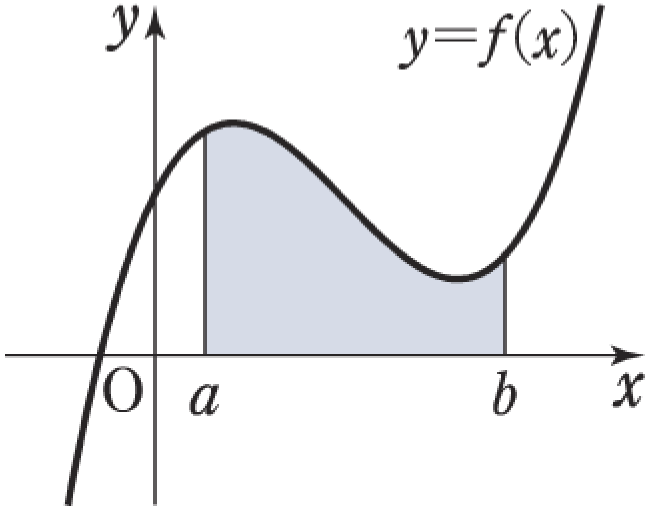
等号成立は、常に$f(x) = g(x)$であるときに限る

【説明】

$$\int_a^b f(x)dx$$

は

関数$y = f(x)$のグラフ、x軸、$x = a$、$x = b$で囲まれた部分の面積Sと等しい



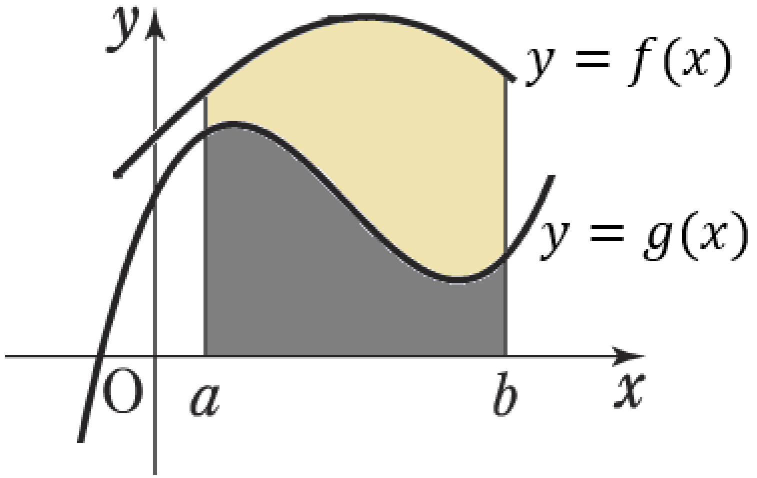
【説明】

区間$[a,\ b]$で$f(x) \geqq g(x)$

（常に$f(x)$が$g(x)$より上か同じ高さ）

なので、それぞれの面積を考えると図から

$$\int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$$



【公式】

区間$[a,\ b]$で$f(x) \geqq g(x)$ならば

$$\int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$$

どういうこと？

等号成立は、常に$f(x) = g(x)$であるときに限る

【説明】

もし

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

ならば

２つの面積が等しい

ということ

【説明】
しかし

区間$[a,\ b]$で$f(x) \geqq g(x)$
（$f(x)$ が$g(x)$より下にくることはない）

なので、面積を等しくするには２つのグラフを完全に重ねるしか方法がない

→よって、「常に$f(x)=g(x)$であるとき」

【例題】

$0 \leqq x \leqq 1$ 　のとき　$1 \leqq 1 + x^2 \leqq 1 + x$

であることを用いて、不等式

$$\log 2 < \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} < 1$$

を証明せよ。

【例題】

$0 \leqq x \leqq 1$のとき$1 \leqq 1+x^2 \leqq 1+x$より

$$\boxed{\frac{1}{1+x} \leqq \frac{1}{1+x^2} \leqq 1}$$

逆数をとった
不等号の向きに注意

【例題】

$0 \leqq x \leqq 1$のとき$1 \leqq 1 + x^2 \leqq 1 + x$より

$$\frac{1}{1+x} \leqq \frac{1}{1+x^2} \leqq 1$$

等号は常には成り立たないので、

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \boxed{<} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \boxed{<} \boxed{\int_0^1 dx}$$

＝をはずす

$\int_0^1 1dx$のこと

1は省略可

【例題】

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx < \int_0^1 dx$$

【例題】

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx < \int_0^1 dx$$

$$[\log|1+x|]_0^1 < \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx < [x]_0^1$$

【例題】

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx < \int_0^1 dx$$

$$[\log|1+x|]_0^1 < \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx < [x]_0^1$$

よって、

$$\log 2 < \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx < 1$$

【練習タイム】
教科書の練習３０をやってみよう

答えは次のページ

【答え】(1)

$x \geqq 1$であるから

$$x^2 - (x^2 - x + 1) = x - 1 \geqq 0$$
$$(x^2 - x + 1) - x = (x - 1)^2 \geqq 0$$

よって

$$x^2 \geqq x^2 - x + 1 \geqq x$$
$$\frac{1}{x^2} \leqq \frac{1}{x^2 - x + 1} \leqq \frac{1}{x}$$

【答え】(2)

(1)より

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx < \int_1^2 \frac{1}{x^2-x+1}dx < \int_1^2 \frac{1}{x}dx$$

よって

$$\frac{1}{2} < \int_1^2 \frac{1}{x^2-x+1}dx < \log 2$$

【課題】
４STEPの
４２６
をやりましょう