数学Ⅲ第７章
「積分法」その２５

「区分求積法」を習得せよ

【はじめに】
区分求積法とは

面積を求めることが簡単ではない図形に対して、
面積を求めることが簡単な図形を大量にはめて
面積を求めよう

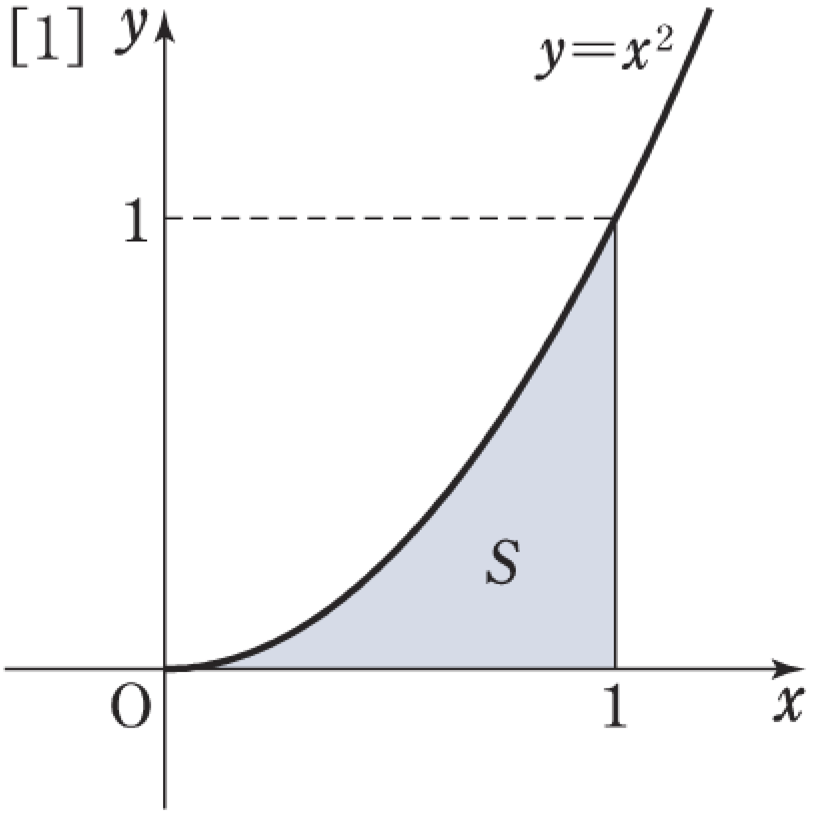
という作戦

【例えば】

曲線$y = x^2$とx軸および$x = 1$で囲まれた部分の面積Sを求めると、

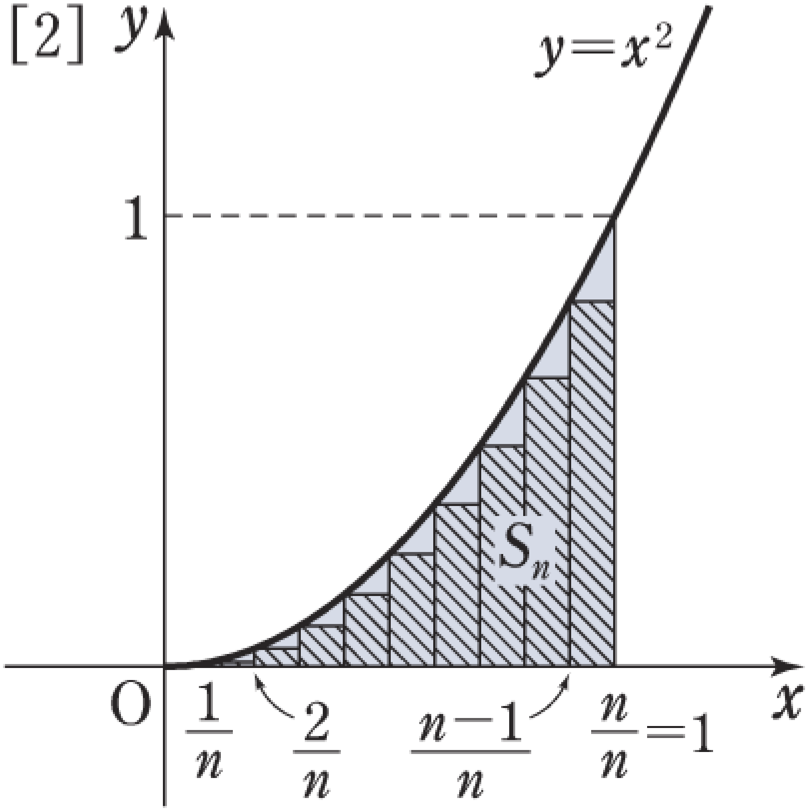
$$S = \int_0^1 x^2 dx = \boxed{\frac{1}{3}}$$

今だけ
覚えといて



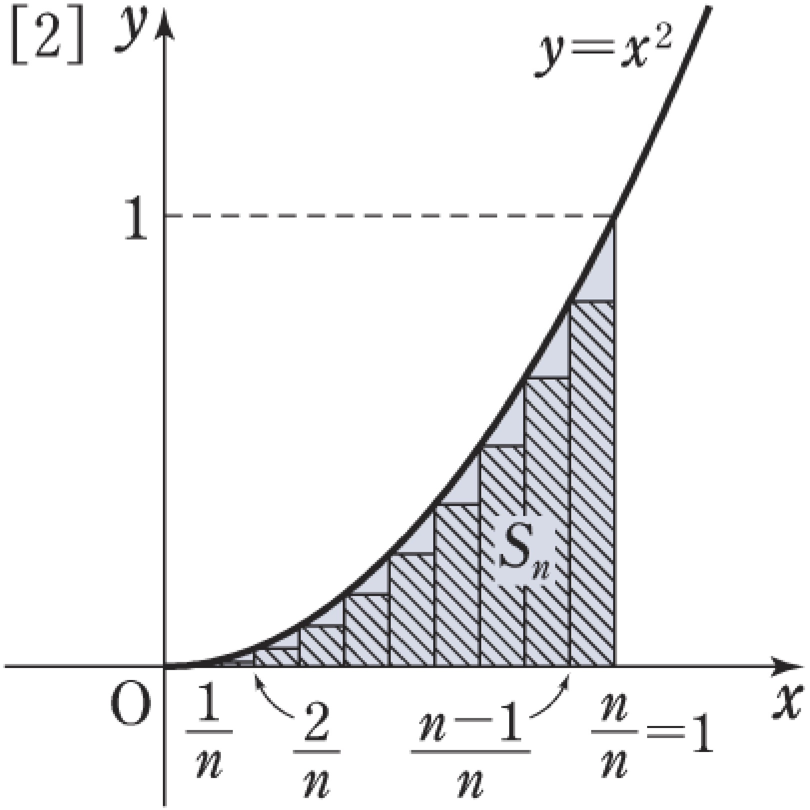
【例えば】

ここで横にn等分してn個の長方形をつくる（図を参考にしよう）。長方形の面積の和S_nはSより小さい（長方形の上側にその誤差がある）が、nをとてつもなく大きくする（$n \to \infty$）と、誤差が小さくなりだんだんS_nはSに近づく



【例えば】

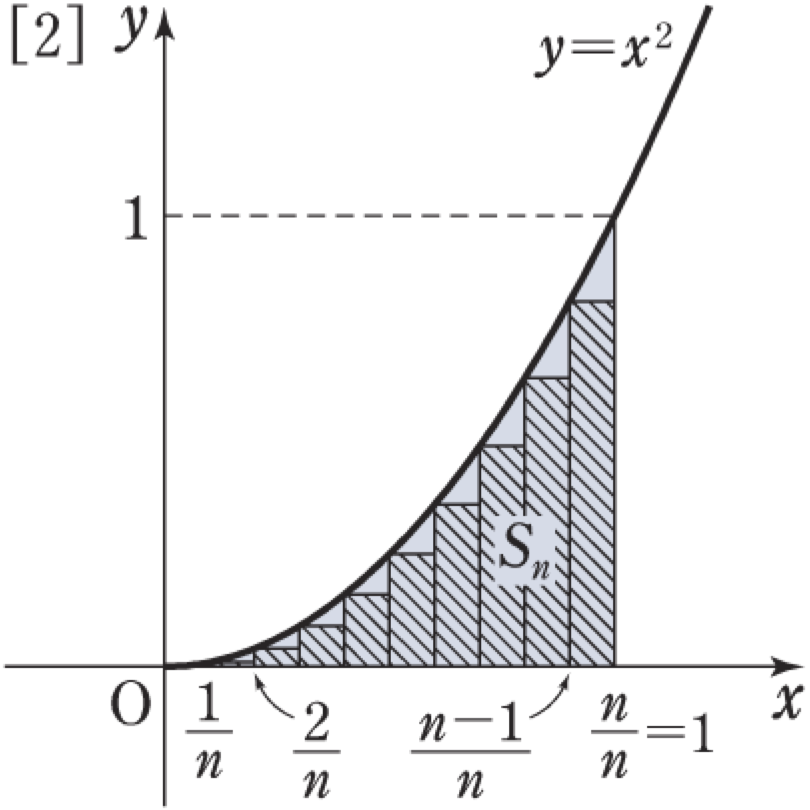
$$S_n = \frac{1}{n}\cdot 0^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$



【例えば】

$$S_n = \boxed{\frac{1}{n}} \cdot 0^2 + \boxed{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \boxed{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \boxed{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

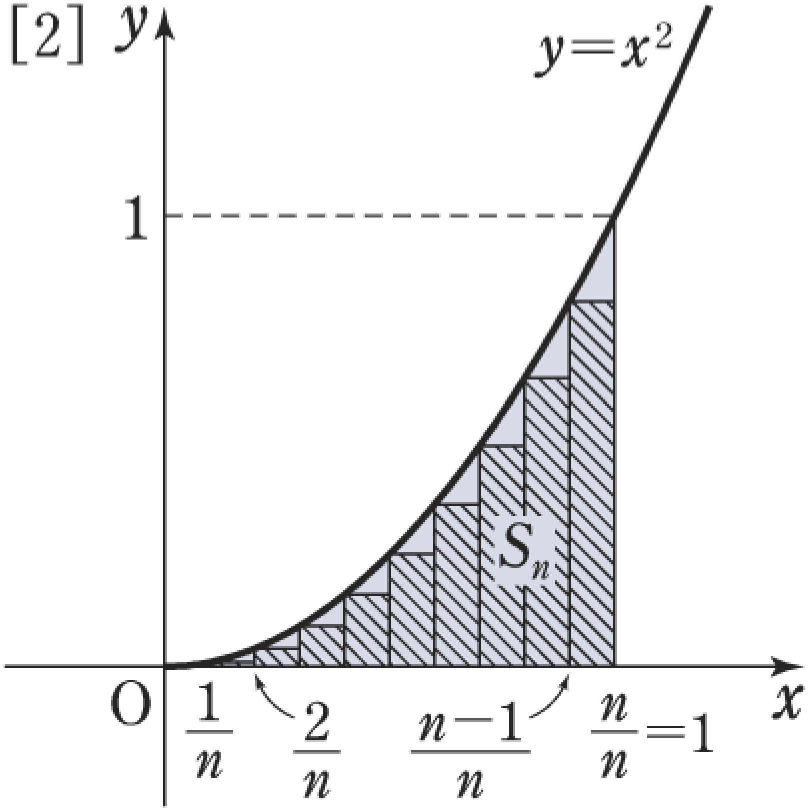
長方形の横の長さ
n等分しているので
全ての長方形が同じ長さ



【例えば】

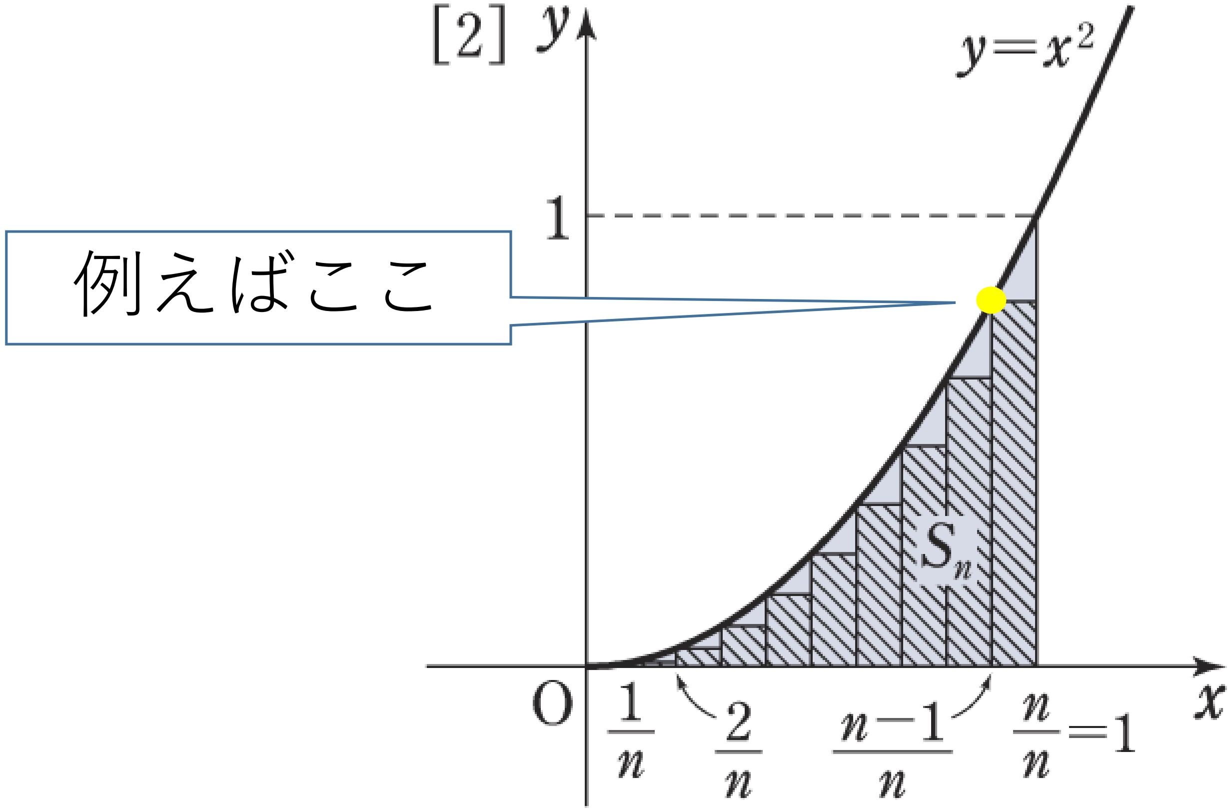
$$S_n=\frac{1}{n}\cdot\boxed{0^2}+\frac{1}{n}\cdot\boxed{\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{n}\cdot\boxed{\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\boxed{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$$

長方形の縦の長さ
長方形の左上の点のy座標
が縦の長さになる



【例えば】

$$S_n=\frac{1}{n}\cdot 0^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\boxed{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$$



【例えば】

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot 0^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\left\{0^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}$$

【例えば】

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot 0^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\left\{0^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n^3}\{0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\}$$

【例えば】

$$S_n = \frac{1}{n^3}\{0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\}$$

【例えば】

$$S_n = \frac{1}{n^3}\{0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\}$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{\boxed{k=1}}^{n-1} k^2$$

本当は$k = 0$だけど
最初の数は0なのでカット

【例えば】

$$S_n = \frac{1}{n^3}\{0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\}$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$= \frac{1}{n^3}\cdot\boxed{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)}$$

Σの公式
覚えてる？

【例えば】

$$S_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

【例えば】

$$S_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{n}{n}\left(\frac{2n-1}{n}\right)$$

【例えば】

$$S_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{n}{n}\left(\frac{2n-1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

【例えば】

$$S_n = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

【例えば】

$$S_n = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

ここで

$$\lim_{n \to \infty} S_n =$$

【例えば】

$$S_n = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

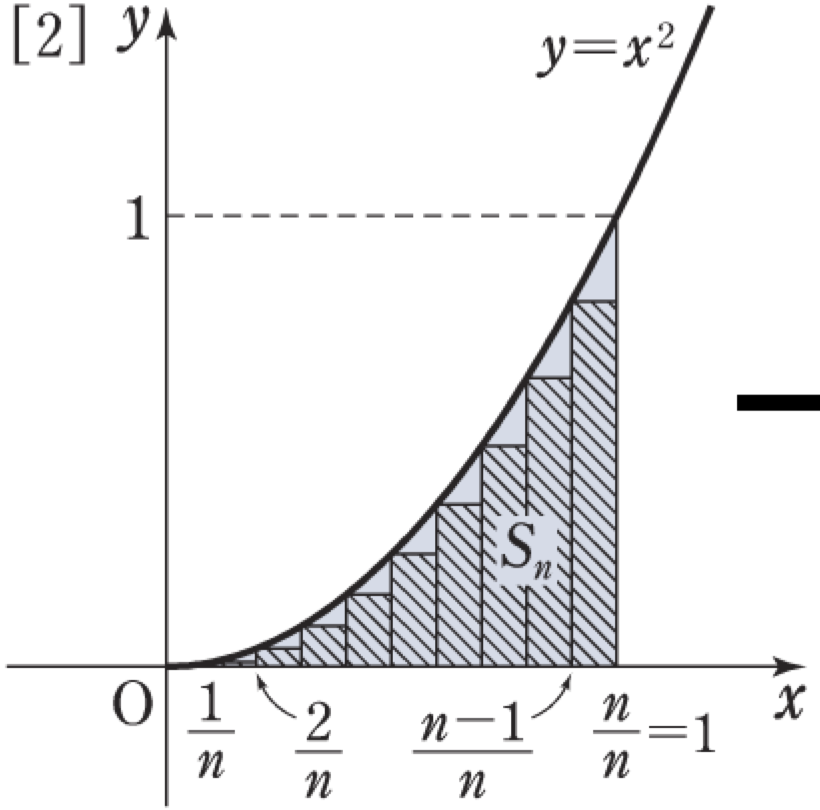
ここで

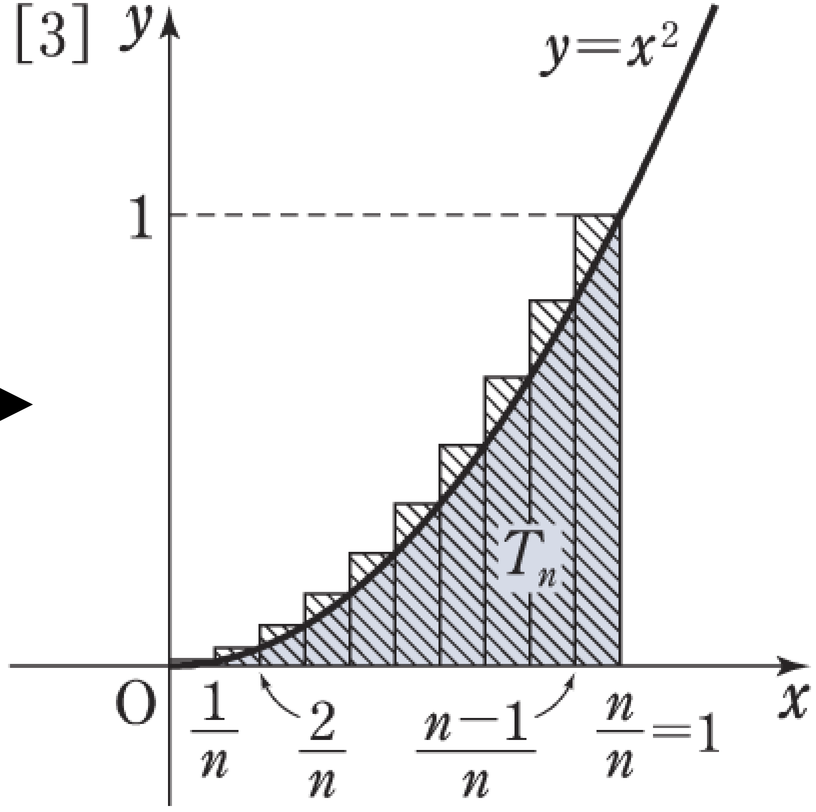
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \boxed{\frac{1}{3}}$$

同じになった！

【例えば】

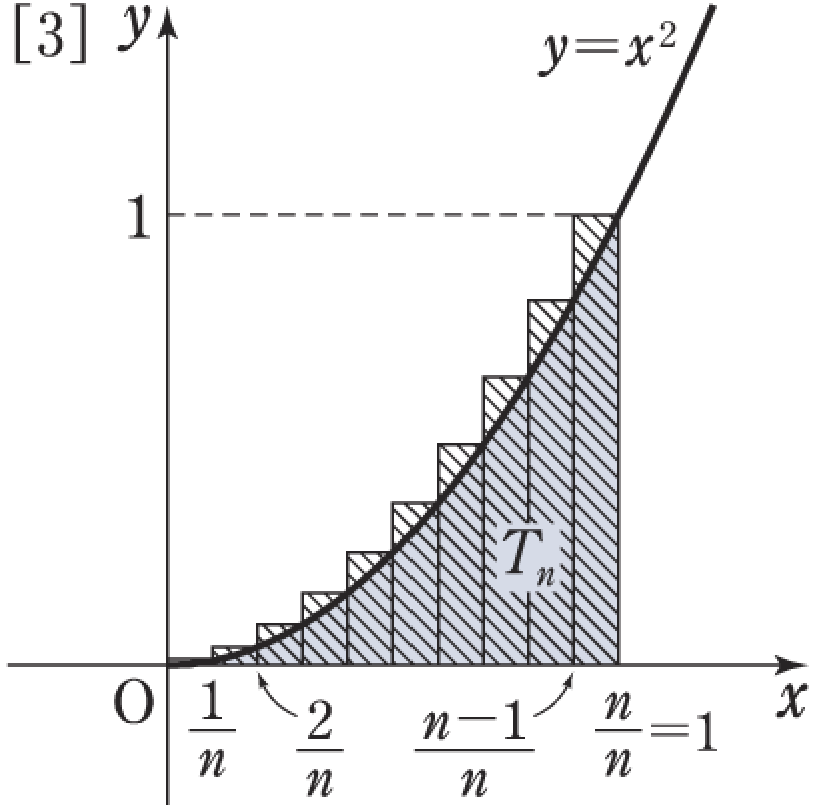
次のように外にはみ出して長方形をはめることも考えられる（長方形の面積の和をT_nとする）





【例えば】

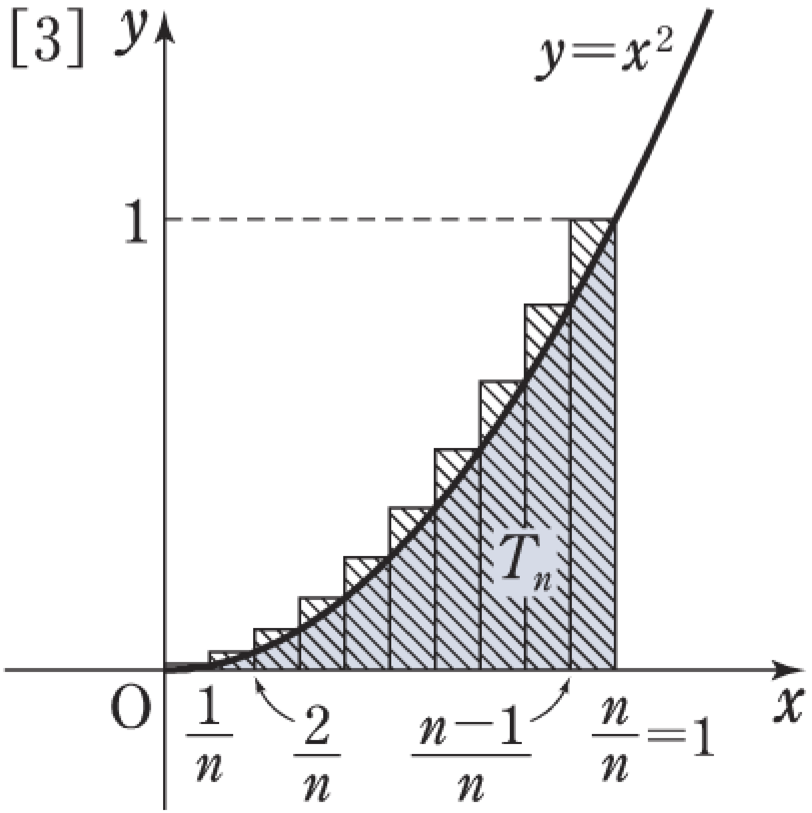
$$T_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2$$



【例えば】

$$T_n = \boxed{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \boxed{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \boxed{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdots + \boxed{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^2$$

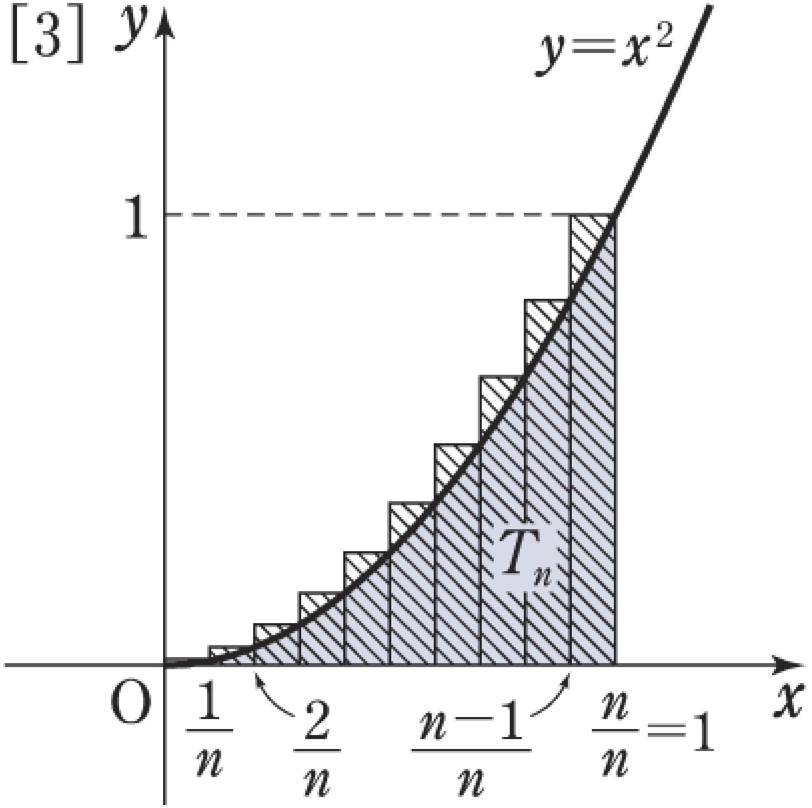
長方形の横の長さ
n等分しているので
全ての長方形が同じ長さ



【例えば】

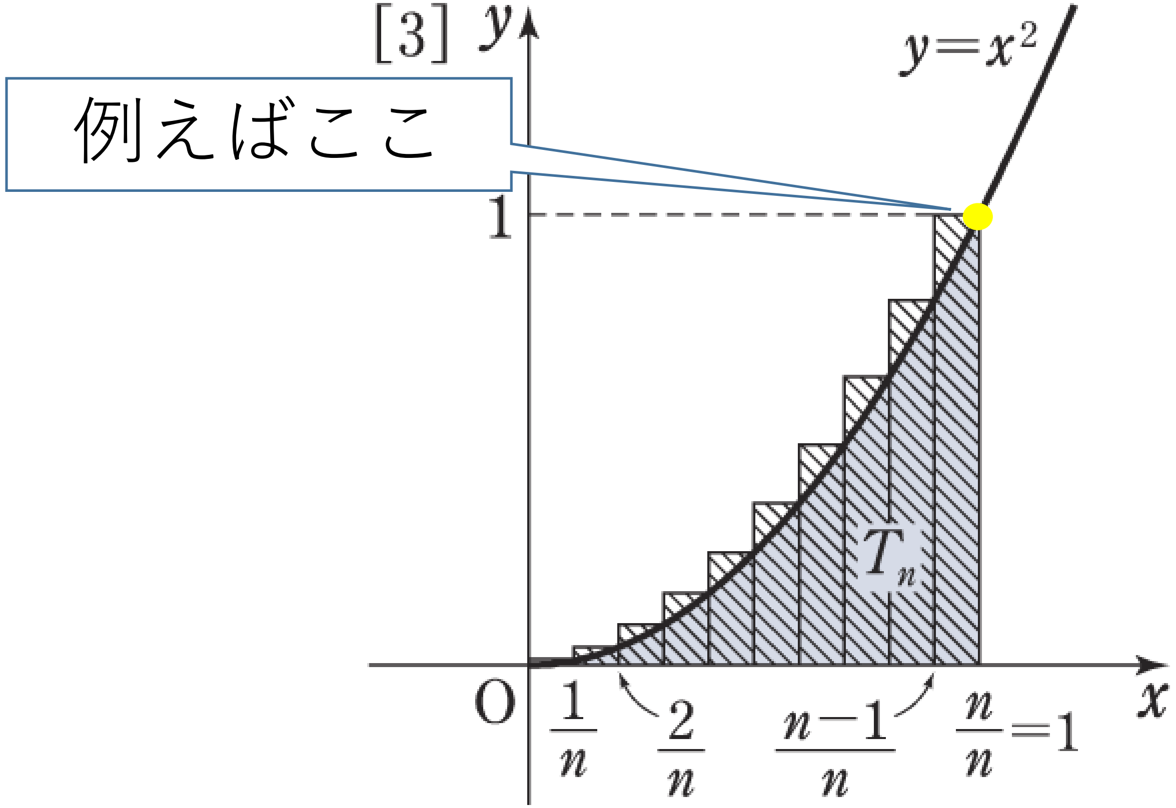
$$T_n = \frac{1}{n}\cdot\boxed{\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{n}\cdot\boxed{\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \frac{1}{n}\cdot\boxed{\left(\frac{3}{n}\right)^2} \cdots + \frac{1}{n}\cdot\boxed{\left(\frac{n}{n}\right)^2}$$

長方形の縦の長さ
長方形の右上の点のy座標
が縦の長さになる



【例えば】

$$T_n=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2\cdots+\frac{1}{n}\cdot\boxed{\left(\frac{n}{n}\right)^2}$$



【例えば】

$$T_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right\}$$

【例えば】

$$T_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n^3}\{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\}$$

【例えば】

$$T_n = \frac{1}{n^3}\{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\}$$

【例えば】

$$T_n = \frac{1}{n^3}\{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\}$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

【例えば】

$$T_n = \frac{1}{n^3}\{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\}$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

【例えば】

$$T_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

【例えば】

$$T_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \left(\frac{n+1}{n} \right) \left(\frac{2n+1}{n} \right)$$

【例えば】

$$T_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \left(\frac{n+1}{n} \right) \left(\frac{2n+1}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right)$$

【例えば】

$$T_n = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

【例えば】

$$T_n = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty} T_n =$$

【例えば】

$$T_n = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \boxed{\frac{1}{3}}$$

同じになった！

【つまり】

長方形は図形の中にはめても、外にはみ出してはめても面積は変わらない！！

【そこで】

ここまでの具体例を文字に置き換えてすべて初めから書くと…

【そこで】

ここまでの具体例を文字に置き換えてすべて初めから書くと…

大変なので、教科書を読もう

【公式】

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

ここで

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta x$$

【公式】よく使うのはこちら

$a=0$、$b=1$、$\Delta x=\frac{1}{n}$、$n_k=\frac{k}{n}$から

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

【公式】よく使うのはこちら

$a=0$、$b=1$、$\Delta x=\frac{1}{n}$、$n_k=\frac{k}{n}$から

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

よく見るのは
こっち

【例題】
極限値

$$S = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$$

を求めよ。

【例題】

極限値

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

を求めよ。

区分求積は３つのパーツ意識する

①$\lim$　と　②$\frac{1}{n}$　と　③$\sum f\left(\frac{k}{n}\right)$

【例題】

極限値

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

を求めよ。

すでにある（OK）

区分求積は3つのパーツ意識する

① $\lim$ と ② $\frac{1}{n}$ と ③ $\sum f\left(\frac{k}{n}\right)$

【例題】

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

【例題】

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

無理やり因数分解することでパーツ②を作成する

【例題】

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{\boxed{1}}{n}}+\frac{1}{1+\frac{\boxed{2}}{n}}+\frac{1}{1+\frac{\boxed{3}}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{\boxed{n}}{n}}\right)$$

変化している部分に
注目して…

【例題】

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{\boxed{k}}{n}}\right)$$

その部分をkにする
これでパーツ③も完成

【例題】

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \right)$$

【例題】

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \right)$$

$$= \boxed{\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx}$$

公式を活用

【例題】

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \right)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

$$= [\log|1+x|]_0^1 = \log 2$$

【練習タイム】

教科書の練習２９をやってみよう

答えは次のページ

【答え】

$$S = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n}$$

$$= \int_0^1 \sin \pi x dx$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

【課題】
４STEPの
４２５
をやりましょう