３年生理系数学Ⅲ　臨時休業中における進捗状況の確認テスト　サンプル

1 (1) $\displaystyle\int\frac{(x-2)(x^2-3)}{x^3}dx=\int\frac{x^3-2x^2-3x+6}{x^3}dx$

$\displaystyle=\int\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)dx$

$\displaystyle=\int dx-2\int\frac{dx}{x}-3\int x^{-2}dx+6\int x^{-3}dx$

$\displaystyle=x-2\log|x|+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+C$

(2) $\displaystyle\int\sin(-5x+1)\,dx=\frac{1}{-5}\cdot\{-\cos(-5x+1)\}+C$

$\displaystyle=\frac{1}{5}\cos(-5x+1)+C$

(3) $\displaystyle\int 3x^2\sqrt{x^3+2}\,dx=\frac{2}{3}(x^3+2)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(x^3+2)\sqrt{x^3+2}+C$

別解　$x^3+2=u$ とおくと　$3x^2dx=du$

$\displaystyle\int 3x^2\sqrt{x^3+2}\,dx=\int\sqrt{x^3+2}\cdot 3x^2dx=\int\sqrt{u}\,du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$

$\displaystyle=\frac{2}{3}(x^3+2)\sqrt{x^3+2}+C$

(4) $\displaystyle\int\log(x+1)\,dx=\int(x+1)'\log(x+1)dx$

$\displaystyle=(x+1)\log(x+1)-\int(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}dx$

$\displaystyle=(x+1)\log(x+1)-\int dx$

$=(x+1)\log(x+1)-x+C$

(5) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x-1)}=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx=\log|x-1|-\log|x|+C$

$\displaystyle=\log\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$

2 (1) $\displaystyle\int_1^2\frac{dy}{y^3}=\left[-\frac{1}{2y^2}\right]_1^2=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-1\right)=\frac{3}{8}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\Big[\tan\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-0=1$

(3) $\displaystyle\int_0^1(e^x-e^{-x})dx=\Big[e^x+e^{-x}\Big]_0^1=(e+e^{-1})-(e^0+e^0)=e+\frac{1}{e}-2$

(4) $0\leqq x\leqq\pi$ のとき　$|\sin x|=\sin x$

$\pi\leqq x\leqq 2\pi$ のとき　$|\sin x|=-\sin x$

であるから

$\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin x|dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)dx$

$\displaystyle=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}+\Big[\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi}$

$=\{1-(-1)\}+\{1-(-1)\}=4$

別解　$\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin x|dx=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$

$=2\{1-(-1)\}=4$

(5) $x=\sin\theta$ とおくと　$dx=\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$-1\longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{2}\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

$\displaystyle-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき，$\cos\theta\geqq 0$ であるから

$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta$

よって

$\displaystyle\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta$

$\displaystyle=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$

(6) $x=\tan\theta$ とおくと　$\displaystyle dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0\longrightarrow\sqrt{3}$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{3}$

よって

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+1}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}$

(7) $x\sqrt{4-x^2}$ は奇関数であるから　$\displaystyle\int_{-2}^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx=0$

(8) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx=\int_0^1 x(e^x)'dx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1(x)'e^xdx$

$\displaystyle=e-\int_0^1 e^xdx=e-\Big[e^x\Big]_0^1=1$

3 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=a$ とおくと，与えられた等式から

$f(x)=\sin x+a$　……①

となる。よって

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t+a)dt=\Big[-\cos t+at\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\displaystyle=\frac{\pi}{2}a+1$

ゆえに，$\displaystyle\frac{\pi}{2}a+1=a$ から　$\displaystyle a=-\frac{2}{\pi-2}$

これを ① に代入して　$\displaystyle f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi-2}$

4 $\displaystyle S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sin\frac{k\pi}{n}$

よって，$f(x)=\sin\pi x$ とすると

$\displaystyle S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\sin\pi x\,dx$

$\displaystyle=-\frac{1}{\pi}\Big[\cos\pi x\Big]_0^1=\frac{2}{\pi}$