

数学Ⅲ第7章

「積分法」 その19

「tan変換」を習得せよ

【公式】 重要なので、公式として覚えること
「tan変換」と名付ける

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx$$

の形のと看、

$$x = a \tan \theta$$

とおく。

【例題】

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

を求める。

【例題】

$x = \tan \theta$ とおくと

$$dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

また

x		0	→	1
θ		0	→	$\frac{\pi}{4}$

【例題】

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx =$$

【例題】

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

【例題】

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

三角関数の相互関係

$$\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

を使っています

【例題】

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\end{aligned}$$

【例題】

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

【練習タイム】

教科書の練習 2 2 をやってみよう

答えは次のページ

【答え】

(1)

$$x = \tan \theta \text{ とおく } \text{ と } dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

x	0	\rightarrow	$\sqrt{3}$
θ	0	\rightarrow	$\frac{\pi}{3}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{\pi}{3}$$

【答え】

(2)

$$x = 2 \tan \theta \text{ とおくと } dx = \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta$$

x	-2	\rightarrow	2
θ	$-\frac{\pi}{4}$	\rightarrow	$\frac{\pi}{4}$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4(\tan^2 \theta + 1)} \cdot \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

【答え】

(3)

$$x = 3 \tan \theta \text{ とおくと } dx = \frac{3}{\cos^2 \theta} d\theta$$

x	-3	\rightarrow	$\sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{4}$	\rightarrow	$\frac{\pi}{6}$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{9(\tan^2 \theta + 1)} \cdot \frac{3}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{5}{36} \pi$$

【課題】

4 STEPの

4 0 8

の途中から最後までやりましょう