

①～③ × 6点 (完答) それ以外 8点

【目標時間 30分】

できない問題があったらもう一度教科書を見て復習する!

① 三角関数の加法定理を答えよ。

② 加法定理を用いて、 $\sin 165^\circ$ 、 $\cos 165^\circ$ 、 $\tan 165^\circ$ の値を求めよ。

③ $\frac{13}{12}\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{3}{4}\pi$ 、 $\frac{19}{12}\pi = \frac{3}{4}\pi + \frac{5}{6}\pi$ であることを用いて、 $\sin \frac{13}{12}\pi$ 、 $\cos \frac{13}{12}\pi$ 、 $\tan \frac{19}{12}\pi$ の値を求めよ。

④ α が鋭角、 β が鈍角であるとき、次の値を求めよ。

(1) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ 、 $\sin \beta = \frac{1}{4}$ のとき $\sin(\alpha + \beta)$ 、 $\cos(\alpha + \beta)$

(2) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ 、 $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ のとき $\sin(\alpha - \beta)$ 、 $\cos(\alpha - \beta)$

(3) $\tan \alpha = 5$ 、 $\tan \beta = -3$ のとき $\tan(\alpha + \beta)$ 、 $\tan(\alpha - \beta)$

⑤ 2直線 $y = -3\sqrt{3}x + 1$ 、 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 3$ のなす角 θ を求めよ。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。



1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
3. $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$

2 $\sin 165^\circ = \sin(120^\circ + 45^\circ)$
 $= \sin 120^\circ \cos 45^\circ + \cos 120^\circ \sin 45^\circ$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$\cos 165^\circ = \cos(120^\circ + 45^\circ)$
 $= \cos 120^\circ \cos 45^\circ - \sin 120^\circ \sin 45^\circ$
 $= -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $= -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$\tan 165^\circ = \tan(120^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 120^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 120^\circ \tan 45^\circ}$
 $= \frac{-\sqrt{3} + 1}{1 - (-\sqrt{3}) \cdot 1} = \frac{-\sqrt{3} + 1}{1 + \sqrt{3}}$
 $= \frac{(1 - \sqrt{3})^2}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = -2 + \sqrt{3}$

参考 $165^\circ = 135^\circ + 30^\circ$ としてもよい。

$\sin(30^\circ + 135^\circ)$
 $= \sin 30^\circ \cos 135^\circ + \cos 30^\circ \sin 135^\circ$
 $= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

でもo.k!

$$\begin{aligned} \text{[3]} \quad \sin \frac{13}{12}\pi &= \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{3}{4}\pi \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{3}{4}\pi + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{3}{4}\pi \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{13}{12}\pi &= \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{3}{4}\pi \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{3}{4}\pi - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{3}{4}\pi \\ &= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \frac{19}{12}\pi &= \tan \left(\frac{3}{4}\pi + \frac{5}{6}\pi \right) = \frac{\tan \frac{3}{4}\pi + \tan \frac{5}{6}\pi}{1 - \tan \frac{3}{4}\pi \tan \frac{5}{6}\pi} \\ &= \frac{-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - (-1) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)} = -\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \\ &= -\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = -2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

○
π が π/4 から
π/3, π/4 の
和か差です。
注意しよう

$$\begin{aligned} \text{[4]} \quad (1) \quad \alpha \text{ は鋭角であるから} \quad \sin \alpha > 0 \\ \text{よって} \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^2} \\ = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta \text{ は鈍角であるから} \quad \cos \beta < 0 \\ \text{よって} \quad \cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} \\ = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^2} = -\frac{\sqrt{15}}{4} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{15}}{4} \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \\ &= -\frac{2\sqrt{30} - 1}{12} \end{aligned}$$

sin α cos β
↓ ↓
cos α sin β
tan α tan β が求まる

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{4} \\ &= -\frac{\sqrt{15} + 2\sqrt{2}}{12}\end{aligned}$$

(2) α は鋭角であるから $\cos\alpha > 0$

$$\begin{aligned}\text{よって } \cos\alpha &= \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

β は鈍角であるから $\sin\beta > 0$

$$\begin{aligned}\text{よって } \sin\beta &= \sqrt{1 - \cos^2\beta} \\ &= \sqrt{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \\ &= \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = -\frac{63}{65}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \\ &= \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = -\frac{16}{65}\end{aligned}$$

$$(3) \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = \frac{5 - 3}{1 - 5 \cdot (-3)} = \frac{1}{8}$$

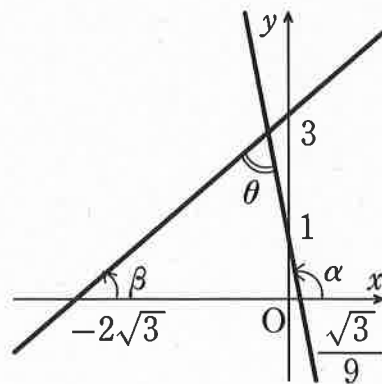
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta} = \frac{5 - (-3)}{1 + 5 \cdot (-3)} = -\frac{4}{7}$$

5 x 軸の正の部分から 2 直線まで測った角を, それぞれ α , β とすると, 右の図より $\theta = \alpha - \beta$ である.

$$\tan\alpha = -3\sqrt{3}, \tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta} \\ &= \frac{-3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + (-3\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ であるから } \theta = \frac{\pi}{3}$$



鈍角は、90°以下。