整数問題は慣れないと解がすごくたくさんあるように見えてしまいますが、やはり「定石」があります。
〇積の形をつくる
〇不等式で絞り込む
〇剰余系で分類する
※その他…整数、自然数、素数、互いに素、大小関係、偶奇性などを条件から見逃さないことがポイントです！
※結果を絞り込む際に表でまとめることも有効です

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training221]

$x^2-y^2+x-y=10$

$(x+y)(x-y)+(x-y)=10$

$(x-y)(x+y+1)=10$

x，y は自然数であるから，$x-y$，$x+y+1$ は整数であり，$x+y+1 \geqq 3$ かつ $x-y < x+y+1$ である。

よって　$(x-y,\ x+y+1)=(1,\ 10),\ (2,\ 5)$

したがって　$(x,\ y)=(5,\ 4),\ (3,\ 1)$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training233]

条件より，整数 a，b，c は $1 \leqq a \leqq 4$，$1 \leqq b \leqq 4$，$0 \leqq c \leqq 4$ を満たす。

求める数を n とすると，n は 7 進法で $abc_{(7)}$ と表せるから　$n=7^2 \cdot a+7 \cdot b+c$

よって　$n=49a+7b+c$　…… ①

n は 5 進法で $bca_{(5)}$ と表せるから　$n=5^2 \cdot b+5 \cdot c+a$

よって　$n=25b+5c+a$　…… ②

①，② より　$49a+7b+c=25b+5c+a$　　よって　$48a-18b-4c=0$

整理すると　$2(12a-c)=9b$

2 と 9 は互いに素であるから，整数 k を用いて　$12a-c=9k$，$b=2k$

$1 \leqq b \leqq 4$ より　$k=1,\ 2$

[1]　$k=1$ のとき

$12a-c=9$ より　$c=12a-9$

$0 \leqq c \leqq 4$ より　$a=1$

このとき　$c=3$

よって　$a=1$，$b=2$，$c=3$

[2]　$k=2$ のとき

$12a-c=18$ より　$c=6(2a-3)$

$0 \leqq c \leqq 4$ より，これを満たす整数 a は存在しない。

[1]，[2] より　$a=1$，$b=2$，$c=3$

したがって，求める n は ① より　$n=49 \cdot 1+7 \cdot 2+3=66$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training235]

$x^3+(2n-3)x^2-7nx+6=0$　…… ①

① の 1 つの解が正の整数 m であるとき　$m^3+(2n-3)m^2-7nm+6=0$

変形すると　$m\{-m^2-(2n-3)m+7n\}={}^{ア}6$　…… ②

よって，m は 6 の約数である。

$m>0$ であるから　$m=1,\ 2,\ 3,\ 6$

[1]　$m=1$ のとき

② は　$5n+2=6$　　これを満たす正の整数 n は存在しない。

[2]　$m=2$ のとき

② は　$2(3n+2)=6$　　これを満たす正の整数 n は存在しない。

[3]　$m=3$ のとき

② は　$3n=6$　　よって　$n=2$

[4]　$m=6$ のとき

② は　$6(-5n-18)=6$　　これを満たす正の整数 n は存在しない。

以上から　$m={}^{イ}3$，$n={}^{ウ}2$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training245]

条件から　$3x^3-2x^2+1=A(x+1)+x-3$

よって　$A(x+1)=3x^3-2x^2-x+4$

右の計算から　$A=3x^2-5x+4$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2-5x+4 \\
\hline
x+1 & 3x^3-2x^2-x+4 \\
 & 3x^3+3x^2 \\
\hline
 & -5x^2-x \\
 & -5x^2-5x \\
\hline
 & 4x+4 \\
 & 4x+4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training247]

展開式の一般項は　$\dfrac{8!}{p!q!r!}(2x)^p(-y)^q z^r=\dfrac{8!}{p!q!r!} \cdot 2^p \cdot (-1)^q \cdot x^p y^q z^r$

ただし　$p+q+r=8$，$p \geqq 0$，$q \geqq 0$，$r \geqq 0$

$x^2y^3z^3$ の項は $p=2$，$q=3$，$r=3$ のときであるから，その係数は

$\dfrac{8!}{2!3!3!} \cdot 2^2 \cdot (-1)^3=560 \cdot 4 \cdot (-1)=-2240$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training249]

二項定理より　$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}x^{n-1}+{}_nC_nx^n$

$x=-1$ を代入すると

$(1-1)^n={}_nC_0+{}_nC_1(-1)+{}_nC_2(-1)^2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}(-1)^{n-1}+{}_nC_n(-1)^n$

よって　${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}{}_nC_{n-1}+(-1)^n{}_nC_n=0$

［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training259］

$(k+1)x+(k-1)y-5k+1=0$ を k について整理すると　$(x+y-5)k+(x-y+1)=0$

これが k についての恒等式であるから　$x+y-5=0$，　$x-y+1=0$

これを解いて　$x=2$，$y=3$

［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training261］

$$(\text{与式})=ab+8+2+\frac{16}{ab}=ab+\frac{16}{ab}+10$$

ここで，$a>0$，$b>0$ であるから　$ab>0$，$\dfrac{16}{ab}>0$

相加平均と相乗平均の関係により　$ab+\dfrac{16}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\dfrac{16}{ab}}=2\cdot4=8$

ゆえに　$(\text{与式})=ab+\dfrac{16}{ab}+10\geqq 8+10=18$

等号が成り立つのは　$ab=\dfrac{16}{ab}$　　$ab>0$ であるから　$ab=4$

よって，$ab=4$ で最小値 18 をとる。

［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training261］

$$(\text{与式})=(x-1)+\frac{2}{x-1}+1$$

ここで，$x>1$ であるから　$x-1>0$，$\dfrac{2}{x-1}>0$

相加平均と相乗平均の関係により　$(x-1)+\dfrac{2}{x-1}\geqq 2\sqrt{(x-1)\cdot\dfrac{2}{x-1}}=2\sqrt{2}$

ゆえに　$(\text{与式})=(x-1)+\dfrac{2}{x-1}+1\geqq 2\sqrt{2}+1$

等号が成り立つのは　$x-1=\dfrac{2}{x-1}$

$x-1>0$ であるから　$x-1=\sqrt{2}$　　すなわち　$x=1+\sqrt{2}$

よって，$x=1+\sqrt{2}$ で最小値 $2\sqrt{2}+1$ をとる。

［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training273］

$x^2+2(a-\sqrt{3})x-3\sqrt{3}a+9=0$ …… ① の判別式を D_1 とし，$x^2+ax+1=0$ …… ② の判別式を D_2 とすると　$\dfrac{D_1}{4}=(a-\sqrt{3})^2-1\cdot(-3\sqrt{3}a+9)=a^2+\sqrt{3}a-6$

$$D_2=a^2-4\cdot1\cdot1=a^2-4$$

2 次方程式 ① が 2 つの異なる実数解をもつための条件は　$D_1>0$

すなわち　$a^2+\sqrt{3}a-6>0$

左辺を因数分解すると　$(a+2\sqrt{3})(a-\sqrt{3})>0$

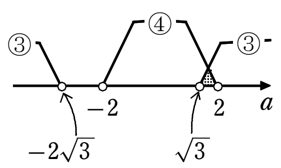
これを解くと　$a<-2\sqrt{3}$，$\sqrt{3}<a$　…… ③

2 次方程式 ② が虚数解をもつための条件は　$D_2<0$

すなわち　$a^2-4<0$

これを解くと　$-2<a<2$ …… ④

③，④ の共通範囲は　$\sqrt{3}<a<2$



［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training275］

方程式 $x^3=1$ から　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω は $x^2+x+1=0$ の解である。

よって，ω は $\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$ を満たす。

これより　$1+\omega=-\omega^2$，$1+\omega^2=-\omega$

よって　$(1+\omega^2)^3(2+\omega)+(1+\omega)^3(2+\omega^2)=(-\omega)^3(2+\omega)+(-\omega^2)^3\{1+(1+\omega^2)\}$

$$=-\omega^3(2+\omega)-\omega^6(1-\omega)$$
$$=-1\cdot(2+\omega)-1^2\cdot(1-\omega)$$
$$=-2-\omega-1+\omega=-3$$

［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training285］

$P(x)$ を 2 次式 $(x+3)(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると，次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x+3)(x-3)Q(x)+ax+b\quad(a,\ b\text{ は定数})$$

と表せる。

よって　$P(-3)=-3a+b$　…… ①，　$P(3)=3a+b$　…… ②

一方，$P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とすると，条件から

$P(x)=(x-2)(x+3)Q_1(x)+5x-2$　　よって　$P(-3)=-17$

① より　$-3a+b=-17$　…… ③

また，$P(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ とすると，条件から

$P(x)=(x-2)(x-3)Q_2(x)-x+10$　　よって　$P(3)=7$

② より　$3a+b=7$　…… ④

③，④ より　$a=4$，$b=-5$　　よって，余りは　$4x-5$

［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training287］

(1)　3 次方程式 $f(x)=0$ が 2 重解 -1 をもつとき，$f(x)$ は $(x+1)^2$ を因数にもつ。

また，定数項が b であるから，$f(x)$ は $f(x)=(x+1)^2(x+b)$ と表される。

右辺を展開すると　$f(x)=x^3+(2+b)x^2+(1+2b)x+b$

$f(x)=x^3+ax^2+13x+b$ の係数と比較すると　$a=2+b$，$13=1+2b$

これを解くと　$a=8$，$b=6$

このとき，残りの解は $x=-6$ であるから適する。

別解　$f(x)=0$ が -1 を 2 重解としてもつとき，残りの解を α とすると，解と係数の関係から　$(-1)+(-1)+\alpha=-a$

$$(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot\alpha+\alpha\cdot(-1)=13$$
$$(-1)\cdot(-1)\cdot\alpha=-b$$

これを解いて　$\alpha=-6$，$a=8$，$b=6$

このとき，$\alpha\neq-1$ より，適する。

(2)　$1+2i$ が解であるから　$f(1+2i)=0$

よって　$(1+2i)^3+a(1+2i)^2+13(1+2i)+b=0$

整理すると　$(2-3a+b)+(4a+24)i=0$

a，b は実数より，$2-3a+b$，$4a+24$ は実数であるから

$2-3a+b=0$，$4a+24=0$　　これを解くと　$a=-6$，$b=-20$

別解　a，b は実数であるから，$f(x)=0$ が $1+2i$ を解にもつとき，その共役な複素数 $1-2i$ も $f(x)=0$ の解である。

残りの解を γ とすると，解と係数の関係から

$$(1+2i)+(1-2i)+\gamma=-a$$
$$(1+2i)(1-2i)+(1-2i)\gamma+\gamma(1+2i)=13$$
$$(1+2i)(1-2i)\gamma=-b$$

これを解いて　$\gamma=4$，$a=-6$，$b=-20$