データの分析では日頃あまり使わない「平均、分散、標準偏差、相関係数」などの計算や生のデータを視覚化して分析するための「箱ひげ図、ヒストグラム」などが素早く正確に書けることが必要です。単に当てはめるだけではなく、逆算する場面も多々あるので、その公式が表す「本質的な意味」も理解しておきましょう。

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training135]

(1)　平均値が 3 である 6 個の数を x_1，……，x_6 とし，平均値が 8 である 4 個の数を x_7，……，x_{10} とする。

平均値の条件から　$\frac{1}{6}(x_1+\cdots\cdots+x_6)=3$，$\frac{1}{4}(x_7+\cdots\cdots+x_{10})=8$

よって　$x_1+\cdots\cdots+x_6=18$，$x_7+\cdots\cdots+x_{10}=32$

ゆえに，全体の平均値は　$\frac{1}{10}(x_1+\cdots\cdots+x_6+x_7+\cdots\cdots+x_{10})=\frac{1}{10}(18+32)=5$

(2)　分散の条件から　$\frac{1}{6}({x_1}^2+\cdots\cdots+{x_6}^2)-3^2=9$，　$\frac{1}{4}({x_7}^2+\cdots\cdots+{x_{10}}^2)-8^2=14$

よって　${x_1}^2+\cdots\cdots+{x_6}^2=108$，　${x_7}^2+\cdots\cdots+{x_{10}}^2=312$

ゆえに，全体の分散は　$\frac{1}{10}({x_1}^2+\cdots\cdots+{x_6}^2+{x_7}^2+\cdots\cdots+{x_{10}}^2)-5^2$

$=\frac{1}{10}(108+312)-25=17$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training143]

(1)　隣り合う A，B をまとめて 1 組と考えると，この 1 組と残り 6 人が並ぶ方法は

$7!=5040$ (通り)

そのおのおのに対して，A，B の並び方が 2 通りずつあるから，求める並び方は

$5040\times 2=10080$ (通り)

(2)　A と B と間の 2 人をまとめて 1 組と考えると，この 1 組と残り 4 人が並ぶ方法は

$5!=120$ (通り)

そのおのおのに対して，A と B の間の 2 人の並び方は　${}_6P_2=30$ (通り)

さらに A，B の並び方が 2 通りずつあるので，求める並び方は

$120\times 30\times 2=7200$ (通り)

(3)　女子同士が隣り合わないように並ぶには，まず男子 5 人が並び，男子と男子の間および両端の 6 個の場所に，女子 3 人が並べばよいから，求める並び方は

$5!\times{}_6P_3=120\times 120=14400$ (通り)

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training151]

(1)　6 個から 1 個を選び，次に残った 5 個から 2 個を選ぶと，残りの 3 個は自動的に決まるから，分け方の総数は　${}_6C_1\times{}_5C_2=60$ (通り)

(2)　S (1 個)，T (1 個)，U (4 個) の 3 つの組に分ける方法は　${}_6C_1\times{}_5C_1$ 通り

S，T の区別をなくすと，同じものが 2! 通りずつできるから，分け方の総数は

$\frac{{}_6C_1\times{}_5C_1}{2!}=15$ (通り)

(3)　S (2 個)，T (2 個)，U (2 個) の 3 つの組に分ける方法は　${}_6C_2\times{}_4C_2$ 通り

S，T，U の区別をなくすと，同じものが 3! 通りずつできるから，分け方の総数は

$\frac{{}_6C_2\times{}_4C_2}{3!}=15$ (通り)

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training153]

(1)　B，C，D，E の 4 文字を並べ，その両端と間の 5 か所から 3 か所を選んで A を入れればよい。

よって　$4!\times{}_5C_3=24\times 10=240$ (通り)

(2)　□ 3 個，A 3 個，B 1 個を 1 列に並べて，3 個の □ を左から C，D，E とすればよい。

よって　$\frac{7!}{3!3!1!}=140$ (通り)

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training163]

カードの取り出し方の総数は　8^4 通り

(1)　$a+b+c+d=6$ となる 4 つの数字の組合せは，(1，1，1，3)，(1，1，2，2) の 2 通り。

それぞれの場合について，取り出す順番を考えると

(1，1，1，3) は　$\frac{4!}{3!1!}=4$ (通り)

(1，1，2，2) は　$\frac{4!}{2!2!}=6$ (通り)

よって，$a+b+c+d=6$ となるカードの取り出し方は　$4+6=10$ (通り)

求める確率は　$\frac{10}{8^4}=\frac{5}{2048}$

(2)　$abcd$ が奇数となるのは，a，b，c，d がすべて奇数となるときである。

よって，$abcd$ が奇数となるカードの取り出し方は　4^4 通り

求める確率は　$\frac{4^4}{8^4}=\frac{1}{16}$

(3)　$(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)=0$ となるのは，a，b，c，d のうち少なくとも 1 つが 1 のときである。

a，b，c，d がすべて 1 以外である確率は　$\frac{7^4}{8^4}$

よって，求める確率は　$1-\frac{7^4}{8^4}=\frac{1695}{4096}$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training173]

3 戦目までに A が 2 回，B が 1 回勝ち，4 戦目に A が勝つ確率であるから

$${}_3C_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(1-\frac{3}{5}\right)^{3-2}\times\frac{3}{5}=3\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{162}{625}$$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training183]

(1)　$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin 60°=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

(2)　点 M，N はそれぞれ辺 BC，AB の中点であるから，△NBM と △ABC において

NB : AB＝1 : 2，　MB : CB＝1 : 2

また　∠B は共通

よって，△NBM∽△ABC であり，その相似比は　1 : 2

ゆえに　$\triangle NBM=\frac{1}{4}\triangle ABC=\frac{1}{4}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{8}$

別解　$\triangle NBM=\frac{1}{2}\cdot BM\cdot BN\sin 60°=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{8}$

(3)　点 G は △ABC の重心であるから　AG : GM＝2 : 1

よって　$\triangle GNM=\frac{1}{3}\triangle ANM$　…… ①

また，点 N は辺 AB の中点であるから　△ANM＝△NBM　…… ②

①，② から　$\triangle GNM=\frac{1}{3}\triangle NBM=\frac{1}{3}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training191］

(1)　円 C_1，C_2 の中心をそれぞれ D，E とする。

D から BE に垂線 DF を下ろすと，

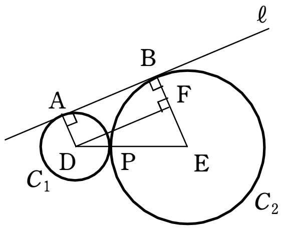
$\angle A=\angle B=90^\circ$ であるから

$$DF=AB,\ BF=AD=4$$

△DEF において，$\angle F=90^\circ$ であるから

$$DF=\sqrt{DE^2-FE^2}=\sqrt{(9+4)^2-(9-4)^2}$$
$$=12$$

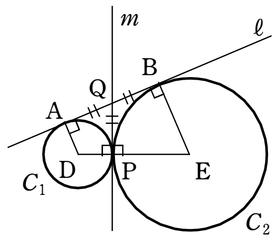
よって　　$AB=12$



(2)　ℓ，m は円 C_1，C_2 の接線であるから

$$PQ=AQ=BQ$$

よって　$PQ=\dfrac{1}{2}AB=6$



［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training193］

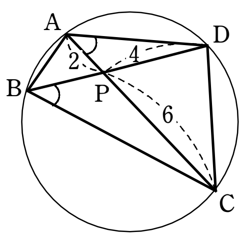
$\angle DAC=\angle CBD$ より，四角形 ABCD は円に内接している。

$$PC=AC-AP=8-2=6$$

方べきの定理により　　$PA\cdot PC=PB\cdot PD$

すなわち　　$2\cdot 6=PB\cdot 4$　　　ゆえに　　$PB=3$

したがって　　$BD=PB+PD=3+4=7$



［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training203］

x と y の最大公約数が 8 であるから，x と y は $x=8a$，$y=8b$ と表される。

ただし，a と b は互いに素で，$a<b$ である。

このとき，x と y の最小公倍数は $8ab$ であるから　　$8ab=480$

すなわち　　$ab=60$

$ab=60$，$a<b$ を満たし，互いに素である a，b の組は

$$(a,\ b)=(1,\ 60),\ (3,\ 20),\ (4,\ 15),\ (5,\ 12)$$

よって，条件を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ は全部で 4 組ある。

［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training205］

$2n-1$ と $2n+1$ の最大公約数を g とすると

$$2n-1=ga,\ 2n+1=gb\quad (a,\ b \text{ は互いに素である自然数})$$

と表される。

この 2 式から n を消去して　　$2=g(b-a)$

$2n-1<2n+1$ より $b-a>0$ であり，g，a，bは自然数であるから　　$g=1$　または 2

$2n-1$，$2n+1$ は奇数であるから g も奇数である。

よって　　$g=1$

ゆえに，$2n-1$ と $2n+1$ の最大公約数は 1 であるから，$2n-1$ と $2n+1$ は互いに素である。

［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training219］

3，7 の数が記されたカードの枚数をそれぞれ a，b とすると

$a>b$　……①

$a<2b$　……②

$3a+7b=140$　……③

③ から　　$3a=7(20-b)$　……④

a，$20-b$ は整数であり，3 と 7 は互いに素であるから，a は 7 の倍数である。

よって，k を整数とすると　　$a=7k$

④ より　　$b=20-3k$

① から　　$7k>20-3k$　　　よって　　$k>2$　……⑤

② から　　$7k<2(20-3k)$　　　よって　　$k<\dfrac{40}{13}$　……⑥

⑤，⑥ から　　$2<k<\dfrac{40}{13}=3.07\cdots\cdots$

この不等式を満たす整数 k は　　$k=3$

このとき　　$a=21$，$b=11$

したがって，3 のカードは 21 枚，7 のカードは 11 枚ある。