

# 数学Ⅲ第7章

## 「積分法」 その18

「sin変換」を習得せよ

【公式】 重要なので、公式として覚えること  
「sin変換」と名付ける

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

の形のと看、

$$x = a \sin \theta$$

とおく。

【例題】

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

( $a$ は正の定数)

を求める。

【例題】

$x = a \sin \theta$  とおくと

$$dx = a \cos \theta d\theta$$

また

$x$		0	→	1
<hr/>				
$\theta$		0	→	$\frac{\pi}{2}$

【例題】

$$\sqrt{a^2 - x^2} =$$

【例題】

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a \sin \theta)^2}$$

【例題】

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a \sin \theta)^2} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)}\end{aligned}$$

【例題】

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a \sin \theta)^2} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta}\end{aligned}$$



### 【例題】

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a \sin \theta)^2}$$

$$= \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)}$$

$$= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta}$$

$$= a \cos \theta$$

本来は $|\cos \theta|$ だが

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ なので  $\cos \theta \geq 0$   
が確定

【例題】

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx =$$

【例題】

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos \theta \cdot a \cos \theta d\theta$$

【例題】

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos \theta \cdot a \cos \theta d\theta \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta\end{aligned}$$

## 【例題】

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos \theta \cdot a \cos \theta d\theta \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta\end{aligned}$$

半角の公式  
覚えていますか？

【例題】

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \left[ \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

【例題】

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \left[ \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \pi a^2\end{aligned}$$

## 【練習タイム】

教科書の練習 2 1 をやってみよう

答えは次のページ



【答え】

(1)

$x = \sin \theta$  とおくと  $dx = \cos \theta d\theta$

$x$	$-1$	$\rightarrow$	$1$
$\theta$	$-\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta = \frac{\pi}{2}$$

【答え】

(2)

$$x = 2 \sin \theta \text{ とおくと } dx = 2 \cos \theta d\theta$$

$x$	$-1$	$\rightarrow$	$\sqrt{3}$
$\theta$	$-\frac{\pi}{6}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4 - (2 \sin \theta)^2} \cdot 2 \cos \theta d\theta = \pi + \sqrt{3}$$

【答え】

(3)

$$x = \sin \theta \text{ とおくと } dx = \cos \theta d\theta$$

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline \theta & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{6} \end{array}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} \cos \theta d\theta = \frac{\pi}{6}$$

# 【課題】

4 STEPの

408

の途中までやりましょう