

# 数学Ⅲ第7章 「積分法」その17

定積分での「置換積分」は？

【はじめに】

$$x = g(t)$$

のとき

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

...①

であった

## 【ここから】

ここで $x$ が $a$ から $b$ まで変化すると、 $t$ が $\alpha$ から $\beta$ まで変化するとき、次のように表す。

$$\begin{array}{c|ccc} x & a & \rightarrow & b \\ \hline t & \alpha & \rightarrow & \beta \end{array}$$

$$a = g(\alpha)、b = g(\beta) \text{ です}$$

【公式】 定積分での置換積分です

①によって

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) g'(t) dt$$

となる

【例題】

$$\int_0^1 (2x + 1)^3 dx$$

を求める。

## 【例題】

$$\int_0^1 (2x + 1)^3 dx$$

$2x + 1 = t$ とおくと

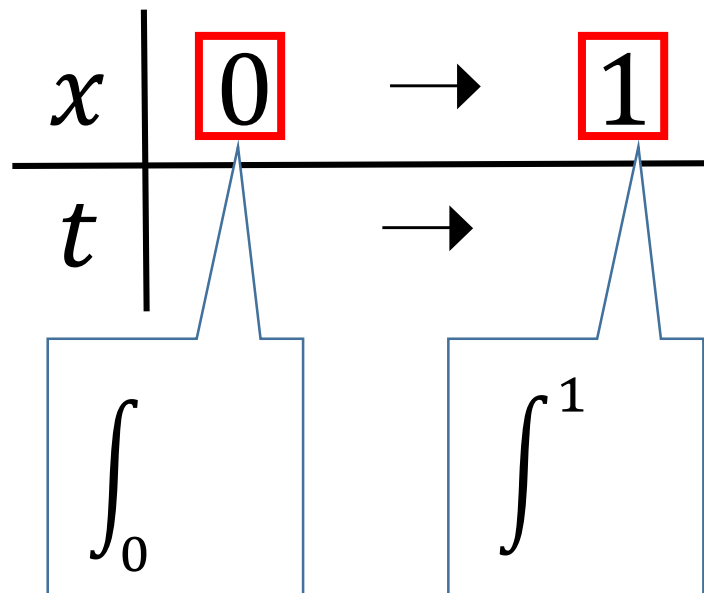
$$x = \frac{t - 1}{2}$$

$$dx = \frac{1}{2} dt$$

このあたりは  
不定積分のとき  
と同じ

# 【例題】

また



# 【例題】

また

$x$	$0$	$\rightarrow$	$1$
$t$	$1$	$\rightarrow$	$3$

$$2 \cdot 0 + 1 = t$$

$$2 \cdot 1 + 1 = t$$

から下の段の数を完成させる



【例題】

$$\int_0^1 (2x + 1)^3 dx =$$

【例題】

$$\int_0^1 (2x + 1)^3 dx = \int_{\boxed{1}}^{\boxed{3}} t^3 \cdot \frac{1}{2} dt$$

先ほどの表を使って  
数字を変える

【例題】

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x + 1)^3 dx &= \int_1^3 t^3 \cdot \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 t^3 dt\end{aligned}$$

【例題】

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x + 1)^3 dx &= \int_1^3 t^3 \cdot \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 t^3 dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} t^4 \right]_1^3\end{aligned}$$

【例題】

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x + 1)^3 dx &= \int_1^3 t^3 \cdot \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 t^3 dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} t^4 \right]_1^3 \\ &= 10\end{aligned}$$

## 【練習タイム】

教科書の練習20をやってみよう

答えは次のページ

【答え】

(1)

$2 - x = t$  とおくと  $dx = -dt$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & \rightarrow 1 \\ \hline t & 2 & \rightarrow 1 \end{array}$$

$$\int_2^1 \frac{1-t}{t^2} (-dt) = \frac{1}{2} - \log x$$

【答え】

(2)

$$\sqrt{2-x} = t \text{ とおくと } dx = -2t dt$$

$x$	1	→	2
$t$	1	→	0

$$\int_1^0 (2-t^2)t(-2t)dt = \frac{14}{15}$$



【答え】

(3)

$$\cos x = t \text{ とおく } \rightarrow \sin x dx = -dt$$

$x$	$0$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
$t$	$1$	$\rightarrow$	$0$

$$\int_1^0 (1 + t^2)(-dt) = \frac{4}{3}$$

## 【課題】

4 STEPの

407

をやりましょう

409もできますが、可能なら「親分子分」で  
突破しましょう