第 2 節　加法定理

最重要公式
必ず暗記する

6　加法定理

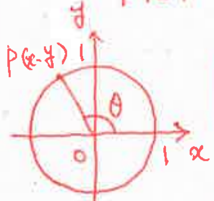
A　正弦，余弦の加法定理

2 つの角の和または差の三角関数の値は，それぞれの角の三角関数の値で表すことができる。

まず，次の等式が成り立つことを証明しよう。　理解しよう

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ①$$

定義を確認する P121



単位円において
r=1のとき,
x=cosθ,
y=sinθ

証明　右の図において，角 $\alpha+\beta$ の動径と単位円の交点を P とすると，P の座標は

$$(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))$$

である。2 点間の距離の公式により

$$AP^2=\{\cos(\alpha+\beta)-1\}^2+\sin^2(\alpha+\beta)$$
$$=2-2\cos(\alpha+\beta)$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に注意する

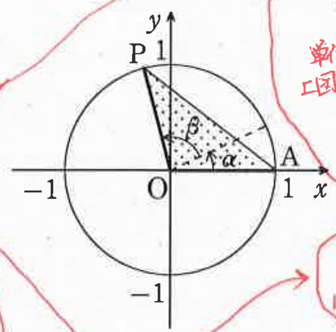
次に，2 点 P，A を，原点を中心として $-\alpha$ だけ回転させた点を，それぞれ Q，R とすると，AP＝RQ である。

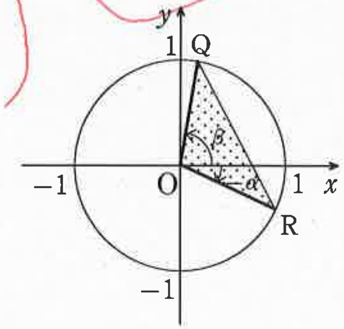
Q，R の座標は

$$Q(\cos\beta,\ \sin\beta),\ R(\cos\alpha,\ -\sin\alpha)$$

であるから

$$RQ^2=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta+\sin\alpha)^2$$
$$=2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$





$AP^2=RQ^2$ から

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$

よって，① が成り立つ。　終

文字と思うと混乱しやすい。
□の場所に −β を入れたと
イメージする

前ページで証明した等式 ① の両辺の $\boxed{\beta}$ を $-\beta$ でおき換えると

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$\cos(\alpha+\square)=\cos\alpha\cos\square-\sin\alpha\sin\square$

□に −β を代入

125 ページの公式 2 により

$$\cos(-\beta)=\cos\beta,\qquad \sin(-\beta)=-\sin\beta$$

であるから

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ②$$

等式 ② の両辺の α を，$\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ でおき換えると，126 ページの問 2 の
と同じ様に考える

公式　$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$，　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

により

$$\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right\}=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}=\sin(\alpha+\beta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

であるから

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ③$$

等式 ③ の両辺の β を $-\beta$ でおき換えると

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

以上のことから，正弦，余弦に関する次の **加法定理** が成り立つ。

正弦，余弦の加法定理　覚え方は色々あるので調べてみよう！

1　$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{cases}$

2　$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$

絶対暗記

(左辺)の＋,−が変わると
(右辺)の＋,−が変わるので,
覚えるのは,＋のみでよい

加法定理を用いると，次のような計算ができる。

例 10　$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$　終

練習 26　加法定理を用いて，次の値を求めよ。

(1)　$\cos 75^\circ$　　(2)　$\sin 15^\circ$　　(3)　$\cos 15^\circ$　　(4)　$\sin 165^\circ$

練習 27　$\frac{7}{12}\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ であることを用いて，$\sin \frac{7}{12}\pi$，$\cos \frac{7}{12}\pi$ の値を求めよ。

三角関数の相互関係より
sinαの値が分かれば，
cosα，tanα
の値も分かる。
cosβの値が分かれば，
sinβ，tanβ
の値も分かる

例題 6　$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$，$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ とする。$\sin \alpha = \frac{3}{5}$，$\cos \beta = \frac{12}{13}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$ と $\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

cos

解　$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$，$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ であるから　　$\cos \alpha < 0$，　$\sin \beta > 0$

ゆえに　$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$

$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$

したがって

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$
$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{5}{13} = \frac{16}{65}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$
$$= \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = -\frac{33}{65}$$

練習 28　$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ とする。$\sin \alpha = \frac{2}{3}$，$\sin \beta = \frac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin(\alpha - \beta)$　　(2)　$\cos(\alpha + \beta)$

B　正接の加法定理

正弦と余弦の加法定理から，正接の加法定理を導くことができる。

正接の加法定理

$$3 \quad \begin{cases} \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \\[2ex] \tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \end{cases}$$

絶対暗記

これも(左辺)の+，−が変われば，
(右辺)の+，−も変わる
ので，+だけ覚えればよい

証明　$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$

分母と分子を $\cos\alpha\cos\beta$ で割ると

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

すなわち，第 1 式が成り立つ。

更に，第 1 式の β を $-\beta$ でおき換えると，第 2 式が得られる。　終

例 11　$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2}$$
$$= 2 + \sqrt{3}$$　終

練習 29　加法定理を用いて，次の値を求めよ。

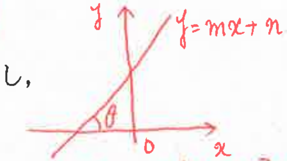
(1)　$\tan 15^\circ$　　(2)　$\tan 105^\circ$　　(3)　$\tan 165^\circ$

練習 30　$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ とする。$\tan\alpha = 2$，$\tan\beta = 3$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\tan(\alpha+\beta)$　　(2)　$\alpha + \beta$

C　2直線のなす角

復習
数Ⅰ 三角比

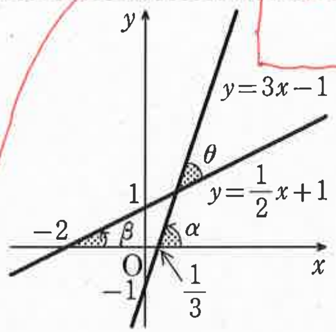


y=mx+n が x軸の正の向きとなす角を θ とするとき

$m=\tan\theta$

例題 7　2直線 $y=3x-1$，$y=\dfrac{1}{2}x+1$ のなす角 θ を求めよ。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

解　右の図のように，2直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，求める角 θ は $\alpha-\beta$ である。



$\tan\alpha=3$，$\tan\beta=\dfrac{1}{2}$

であるから

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=1$$

ゆえに，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から　　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

一般に，交わる2直線

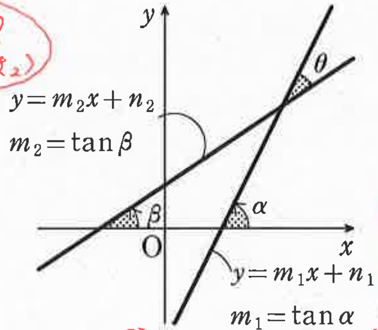
$y=m_1x+n_1$

$y=m_2x+n_2$

が垂直でないとき，そのなす鋭角を θ とすると，$\tan\theta$ は次のようになる。

$$\frac{(傾き_1)-(傾き_2)}{1+(傾き_1)\cdot(傾き_2)}$$

$$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$$



$\tan\theta=-\tan(-\theta)$

絶対値がついてるのは，・・・
基本的に2直線のなす角 θ は，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$。だけど，上の例題で誤って $\tan(\beta-\alpha)$ とすると $\tan\theta>0$ なのに，$\tan(\beta-\alpha)<0$。実際は，$\tan(\alpha-\beta)=-\tan(\beta-\alpha)$ が成り立つので，マイナスが余計なだけだから，絶対値をつける。

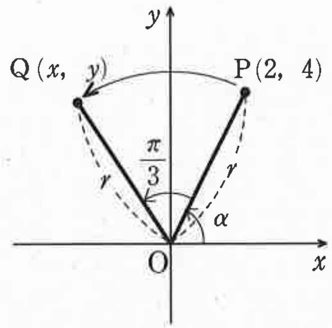
練習 31　次の2直線のなす角 θ を求めよ。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1)　$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+4$，$y=-3\sqrt{3}x-2$　　(2)　$2x-y-1=0$，$x-3y+3=0$

研究　点の回転　〈応用問題〉

加法定理を利用すると，座標平面上の点を，原点Oを中心として一定の角 θ だけ回転させた点の座標が求められる。

例 1　点 P(2, 4) を，原点Oを中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点Qの座標を $(x,\ y)$ とする。



$\mathrm{OP}=r$ とし，動径 OP と x 軸の正の向きとのなす角を α とすると

$2=r\cos\alpha$，　$4=r\sin\alpha$

また，$\mathrm{OQ}=r$ で，動径 OQ と x 軸の正の向きとのなす角は $\alpha+\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$x=r\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right),\quad y=r\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$$

加法定理により

$$x=r\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}-r\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}-4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=1-2\sqrt{3}$$

$$y=r\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+r\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}=4\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=2+\sqrt{3}$$

したがって，Qの座標は　$(1-2\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3})$　終

練習 1　点 P(3, 2) を，原点Oを中心として $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させた点Qの座標を求めよ。

COLUMN

振動現象と三角関数

時刻 t における位置 y が

$$y = A\sin\omega t \qquad (A,\ \omega\ \text{は定数}) \quad \cdots\cdots ①$$

で与えられる y 軸上の点は $-A$ と A の間を，周期 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ で周期的に振動する。この振動を **単振動** と呼び，$|A|$ をその **振幅**，$\dfrac{\omega}{2\pi}$ を **振動数** という。例えば，糸に重りをつけ軽く揺らしたり，バネに重りをつるし少し伸ばして離すと単振動が観察される。単振動している物質の位置の変化は，関数 ① のグラフ，すなわち正弦曲線で表される。

音は空気の密度の振動である。この場合，振動の様子を直接目で見ることはできないが，オシロスコープという機械を使うと，音声の振動もグラフとして観察することができる。ほとんどの場合，オシロスコープで見る曲線は，正弦曲線ほど単純ではない。しかし，そのような場合でも，異なる A や ω についての正弦関数 $A\sin\omega t$ や余弦関数 $A\cos\omega t$ の和のグラフとして，これらの曲線を表すことができる。A は音の大きさに，ω は音の高さに対応する。

光も振動現象で，音の場合と同様に，正弦関数や余弦関数で表すことができる。A は光の強さに，ω は光の色に対応する。レーザーで作られる光はほぼ ① に近い振動をしている。

これら以外にも，様々な振動現象の分析に三角関数が使われている。

7　加法定理の応用

○ $\sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$
$= 2\sin\alpha\cos\alpha$.

○ $\cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$
$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

A　2 倍角の公式

正弦，余弦，正接の加法定理において，β を α でおき換えると，次の **2 倍角の公式** が得られる。

相互関係で形を変える(2パターンできる)

$= 1-\sin^2\alpha - \sin^2\alpha$ ｜ $= \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)$
$= 1-2\sin^2\alpha$ ｜ $= 2\cos^2\alpha - 1$

2 倍角の公式　導けるようにする。

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

○ $\tan(\alpha+\alpha) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

例題 8　$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ のとき，$\sin 2\alpha$ の値を求めよ。

解　$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ であるから　　$\sin\alpha > 0$

よって　　$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2} = \dfrac{3}{5}$

ゆえに　　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right) = -\dfrac{24}{25}$

練習 32　$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 2\alpha$　　(2)　$\cos 2\alpha$　　(3)　$\tan 2\alpha$

問 6　次の等式を証明せよ。

(1)　$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$　　(2)　$\cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha$

練習 33　次の等式を証明せよ。

(1)　$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$　　(2)　$\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos 2\theta$

B　半角の公式

2 倍角の公式 $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ から

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

また，これらから

$$\tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}\cdot\frac{2}{1+\cos 2\alpha} = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

ここで，α を $\frac{\alpha}{2}$ でおき換えると，次の **半角の公式** が得られる。

半角の公式　導けるように

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

半角の公式は，
この形より
の方をよく見る

例 12　$\sin\frac{\pi}{8}$ の値

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$\sin\frac{\pi}{8} > 0$ であるから

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$ 終

練習 34　半角の公式を用いて，次の値を求めよ。

(1)　$\cos\frac{\pi}{8}$　　(2)　$\tan\frac{\pi}{8}$

練習 35　$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin\frac{\alpha}{2}$　　(2)　$\cos\frac{\alpha}{2}$　　(3)　$\tan\frac{\alpha}{2}$

C　三角関数を含む方程式，不等式

2 倍角の公式などを利用して，三角関数を含む方程式や不等式を解いてみよう。

2x，xが混在している
方程式は，2倍角の公式
を使って，xにそろえる

応用例題 3

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\cos 2x = -3\cos x + 1$　　(2)　$\cos 2x < -3\cos x + 1$

解　(1)　2 倍角の公式を用いて，左辺を変形すると

$$2\cos^2 x - 1 = -3\cos x + 1$$

移項して整理すると

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

左辺を変形して　$(\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0$

$\cos x \neq -2$ であるから

$2\cos x - 1 = 0$　　すなわち　　$\cos x = \frac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　　$x = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

(2)　(1) により，与えられた不等式は，次のように変形される。

$$(\cos x + 2)(2\cos x - 1) < 0$$

$\cos x + 2 > 0$ であるから

$2\cos x - 1 < 0$　　すなわち　　$\cos x < \frac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　　$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$

練習 36　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$2\cos 2x = 4\sin x - 1$　　(2)　$\sin 2x = \sin x$

(3)　$\cos 2x \leqq 3\sin x - 1$　　(4)　$\cos 2x < \cos x$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$+)\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

発展　和と積の公式

139 ページの加法定理 1 において，2 式の両辺の和，差をとると

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$

よって，正弦と余弦の積を，和や差に変形する次の公式が得られる。

1　$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

2　$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

全て作れるように練習しておきましょう

同様に，139 ページの加法定理 2 から，次の公式が得られる。

3　$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

4　$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

また，上の公式 1 ～ 4 において，$\alpha+\beta=A$，$\alpha-\beta=B$ とおくと

$$\alpha=\frac{A+B}{2},\quad \beta=\frac{A-B}{2}$$

となるから，正弦，余弦の和や差を，積に変形する次の公式が得られる。

1. の $\alpha\to\dfrac{A+B}{2}$，$\beta\to\dfrac{A-B}{2}$ に変換

5　$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

6　$\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

7　$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

8　$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\sin\left(\dfrac{A+B}{2}+\dfrac{A-B}{2}\right)+\sin\left(\dfrac{A+B}{2}-\dfrac{A-B}{2}\right)\right\}$

$\therefore \sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{1}{2}\{\sin A+\sin B\}$

例 1　(1)　$\sin 3\theta\cos 2\theta=\dfrac{1}{2}\{\sin(3\theta+2\theta)+\sin(3\theta-2\theta)\}$　⑦

$=\dfrac{1}{2}(\sin 5\theta+\sin\theta)$

(2)　$\sin 75^\circ+\sin 15^\circ=2\sin\dfrac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\dfrac{75^\circ-15^\circ}{2}$　⑤

$=2\sin 45^\circ\cos 30^\circ$

$=2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　終

練習 1　次の式を，2 つの三角関数の和または差の形に変形せよ。

(1)　$\sin 4\theta\cos 2\theta$　(2)　$\cos\theta\cos 3\theta$　(3)　$\sin\theta\sin 3\theta$

練習 2　次の式を，2 つの三角関数の積の形に変形せよ。

(1)　$\sin 5\theta+\sin 3\theta$　(2)　$\cos 3\theta+\cos\theta$　(3)　$\cos 3\theta-\cos 5\theta$

練習 3　前ページの公式 1 ～ 8 を用いて，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 75^\circ\cos 45^\circ$　(2)　$\cos 45^\circ\cos 75^\circ$　(3)　$\sin 75^\circ\sin 15^\circ$

(4)　$\sin 105^\circ-\sin 15^\circ$　(5)　$\cos 75^\circ+\cos 15^\circ$　(6)　$\cos 75^\circ-\cos 15^\circ$

例 2　$0\leqq x<2\pi$ のとき，方程式 $\sin 3x+\sin x=0$ を解く。

方程式を変形すると　$2\sin\dfrac{3x+x}{2}\cos\dfrac{3x-x}{2}=0$

すなわち　$2\sin 2x\cos x=0$

よって　$4\sin x\cos^2 x=0$

ゆえに　$\sin x=0$　または　$\cos x=0$

$0\leqq x<2\pi$ であるから　$x=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$　終

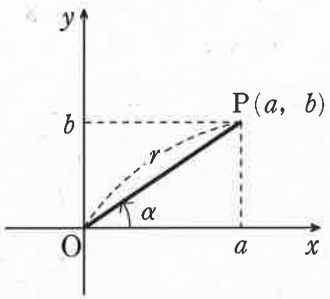
練習 4　$0\leqq x<2\pi$ のとき，方程式 $\cos 3x-\cos x=0$ を解け。

8　三角関数の合成

A　三角関数の合成

加法定理を用いて，$a\sin\theta+b\cos\theta$ の形の式を変形してみよう。

座標 $(a,\ b)$ である点を P とし，動径 OP と x 軸の正の向きとのなす角を α とする。また，線分 OP の長さを r とすると



$$a=r\cos\alpha,\qquad b=r\sin\alpha$$

よって　$a\sin\theta+b\cos\theta=r\cos\alpha\sin\theta+r\sin\alpha\cos\theta$

$$=r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)=r\sin(\theta+\alpha)$$

ここで，$r=\sqrt{a^2+b^2}$ である。　(加法定理の逆)

$a\sin\theta+b\cos\theta$ のこのような変形を **三角関数の合成** という。

三角関数の合成　重要

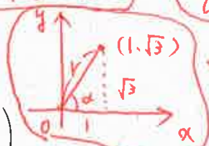
$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし　$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(方法2)　座標 $(1, \sqrt{3})$ を考える ← $\sin\theta$ の係数が x 座標　$\cos\theta$ 〃 y 座標

例 13　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ の変形

(方法1)　$\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ から



原点と点 $(1, \sqrt{3})$ を結んで動径　$r=\sqrt{1+\sqrt{3}^2}=2$　$\alpha=\frac{\pi}{3}$

$$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$

$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\theta+\boxed{\frac{\pi}{3}}\right)$$

終

(方法1)，(方法2) どちらも証明と同じ解法です。
オススメは (方法1)，速いのは (方法2) です。

練習 37　次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

$\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2$

(1)　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$

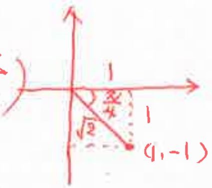
$=2\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)$

$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

(2)　$\sin\theta-\cos\theta$　→ $(1, -1)$

$=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$



$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\alpha=-\frac{\pi}{4}$　逆回転で $-\frac{\pi}{4}$

B　三角関数の合成の応用

応用例題 4

$0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$$

解　左辺を変形して　$2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$

よって　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$　……①

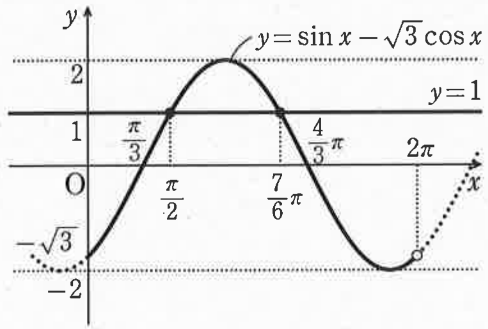
$0\leqq x<2\pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{3}\leqq x-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5}{3}\pi$ であるから，① より

$x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$　　ゆえに　$x=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{7}{6}\pi$

応用例題 4 の解は，関数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ すなわち

$$y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

のグラフと，直線 $y=1$ の $0\leqq x<2\pi$ における交点の x 座標である。



練習 38　$0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\sin x+\cos x=-1$　　(2)　$\sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{3}$

問 7　$0\leqq x<2\pi$ のとき，不等式 $\sin x-\sqrt{3}\cos x>1$ を解け。

練習 39　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1)　$\sin x + \sqrt{3}\cos x < 1$　　　(2)　$\sqrt{3}\sin x - \cos x \leqq \sqrt{2}$

応用例題 5

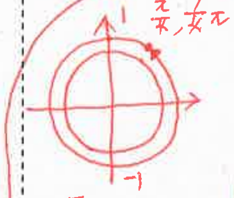
次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$$y = \sin x + \cos x \quad (0 \leqq x < 2\pi)$$

解　与えられた関数の式を変形すると　$y = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき $\dfrac{\pi}{4} \leqq x + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9}{4}\pi$ であるから

$-1 \leqq \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 1$　　よって　$-\sqrt{2} \leqq y \leqq \sqrt{2}$



$\frac{\pi}{4}$, $\frac{9}{4}\pi$

1周しているので

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$

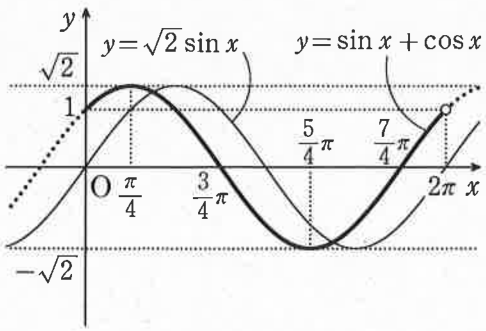
$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ のとき，$x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ から　　$x = \dfrac{\pi}{4}$

$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$ のとき，$x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3}{2}\pi$ から　$x = \dfrac{5}{4}\pi$

ゆえに，この関数は $x = \dfrac{\pi}{4}$ で最大値 $\sqrt{2}$ をとり，

$x = \dfrac{5}{4}\pi$ で最小値 $-\sqrt{2}$ をとる。

【補足】 関数 $y = \sin x + \cos x$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ のグラフは，右の図のようになる。



練習 40　次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$$y = \sqrt{3}\sin x - \cos x \quad (0 \leqq x < 2\pi)$$

問 8　関数 $y = \sin x + 2\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

練習 41　関数 $y = 3\sin x + 4\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

問　題

7．$\theta = \dfrac{\pi}{12}$ のとき，$\sin\theta + \cos\theta$ の値を，次の各方法で求めよ。

(1)　$\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$ と表し，加法定理を用いて，$\sin\dfrac{\pi}{12}$，$\cos\dfrac{\pi}{12}$ の値を求める。

(2)　$\sin\theta + \cos\theta$ を 2 乗して，2 倍角の公式を用いる。

(3)　$\sin\theta + \cos\theta = r\sin(\theta + \alpha)$ と変形する。

→ p.140, 145, 150

8．次の等式を証明せよ。

(1)　$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$

(2)　$\dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

→ p.139

9．$\tan\alpha = 2$，$\tan\beta = 4$，$\tan\gamma = 13$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\tan(\alpha+\beta)$　　　(2)　$\tan(\alpha+\beta+\gamma)$

→ p.141

10．原点を通り，直線 $x - \sqrt{3}y = 0$ と $\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす直線の方程式を求めよ。

→ p.142

11．$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ で，$\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\cos 2\alpha$　　(2)　$\sin 2\alpha$　　(3)　$\cos\dfrac{\alpha}{2}$

→ p.145, 146

12. $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\cos 2x + \cos x + 1 = 0$　　(2)　$\sin 2x = \sqrt{3}\cos x$

(3)　$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$　　(4)　$\sin 2x - \cos 2x = 1$

(5)　$\sin x \geqq \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$　　(6)　$\cos x - \sin x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

→ p.147, 151

13. 次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$$y = \cos 2x - 2\sin x + 1 \quad (0 \leqq x < 2\pi)$$

→ p.152

演　習　問　題　A

1．$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で，$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\sin\theta + \cos\theta$　　(3)　$\sin\theta$，$\cos\theta$

2．$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$　　(2)　$1 \leqq \sqrt{3}\sin x + \cos x \leqq \sqrt{3}$

3．次の関数のグラフをかけ。また，その周期をいえ。

(1)　$y = \sin x \cos x$　　(2)　$y = \sin^2 x - \cos^2 x$　　(3)　$y = \sin^2 x$

演　習　問　題　B

4．$0 < \alpha < \pi$，$0 < \beta < \pi$ のとき，$\sin(\alpha + \beta)$ と $\sin\alpha + \sin\beta$ の大小を比べよ。

5．$\sin\alpha + \sin\beta = \dfrac{1}{2}$，$\cos\alpha + \cos\beta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos(\alpha - \beta)$ の値を求めよ。

6．$t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ とするとき，次の等式が成り立つことを示せ。

(1)　$\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　　(2)　$\tan\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$　　(3)　$\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$

7．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$$y = \sin^2 x + 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x \quad (0 \leqq x < 2\pi)$$

8．関数 $y = 2\sin x\cos x + \sin x + \cos x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$t = \sin x + \cos x$ として，y を t の関数で表せ。

(2)　t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　y の最大値と最小値を求めよ。