

数学Ⅲ第7章 「積分法」その9

「部分積分」を習得せよ

※ 積分の重要な技

【はじめに】

$$\{f(x)g(x)\}' =$$

続きは何？

【はじめに】

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

【はじめに】

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

入れ替えて

$$f(x)g'(x) = \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x)$$

【公式】 「部分積分」と言う

$$f(x)g'(x) = \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x)$$

の両辺不定積分をとって

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

【例題】

$$\int x \sin x \, dx =$$

【例題】

$$\int x \sin x dx = \int x(-\cos x)' dx$$

どちらか一方を
積分

【例題】

$$\int x \sin x dx = \int x(-\cos x)' dx$$

$$= x(-\cos x)$$

上を書き写す

【例題】

$$\int x \sin x \, dx = \int x(-\cos x)' \, dx$$

さきほどとは
逆を微分

$$= x(-\cos x) - \int (x)'(-\cos x) \, dx$$

【例題】

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, dx &= \int x(-\cos x)' \, dx \\ &= x(-\cos x) - \int (x)'(-\cos x) \, dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx\end{aligned}$$

【例題】

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, dx &= \int x(-\cos x)' \, dx \\ &= x(-\cos x) - \int (x)'(-\cos x) \, dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

【ところで…】

ちょっとややこしいと感じた場合
次のように書いておくとよい

【再度例題】

$$\int \boxed{x} \boxed{\sin x} dx =$$

微分 ↓ ↓ 積分

$\boxed{1}$ $\boxed{-\cos x}$

一方を微分
他方を積分
先に作る

【再度例題】

$$\int \boxed{x} \boxed{\sin x} dx =$$

↓ ↓

微分 積分

↓ ↓

1 -cos x

一方を微分
他方を積分
先に作る

どちらを微分して
どちらを積分するか
は経験を積むこと

【再度例題】

$$\int \boxed{x} \sin x \, dx = \underline{x(-\cos x)}$$

①

1

$-\cos x$

①

積分した方と
クロスさせて
積

【再度例題】

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int \underbrace{(x)'(-\cos x)}_{\textcircled{2}} dx$$

$$\underbrace{1}_{\textcircled{2}} - \cos x$$

下同士の
積

【例題】

$$\int x \log x \, dx =$$

【例題】

$$\int x \log x \, dx =$$

積分 ↓ ↓ 微分

$$\frac{x^2}{2}$$

$$\frac{1}{x}$$

【例題】

$$\int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2} \log x$$

$$\frac{x^2}{2}$$

①

$$\frac{1}{x}$$

①

積分した方と
クロスさせて
積

【例題】

$$\int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

②

$$\frac{x^2}{2} \text{ ② } \frac{1}{x}$$

下同士の
積

【例題】

$$\begin{aligned}\int x \log x \, dx &= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + C\end{aligned}$$

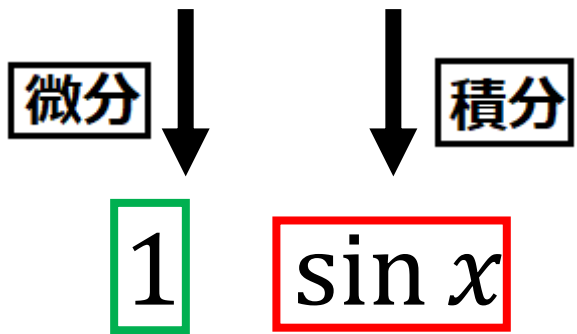
【練習タイム】

教科書の練習 9 をやってみよう

答えは次のページ

【答え】 (1)

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$$



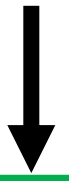
【答え】 (2)

$$\int (2x - 1) \log x \, dx = (x^2 - x) \log x - \frac{x^2}{2} + x + C$$

積分



$$x^2$$

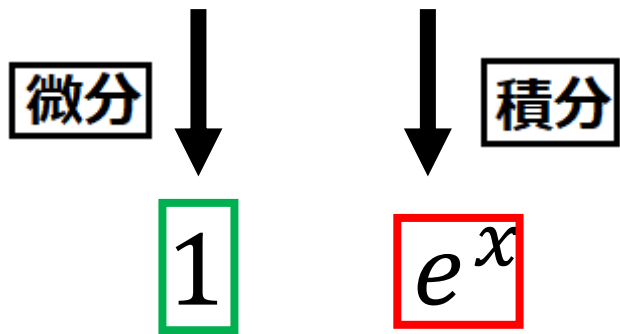


微分

$$\frac{1}{x}$$

【答え】 (3)

$$\int (x+1)e^x dx = xe^x + C$$

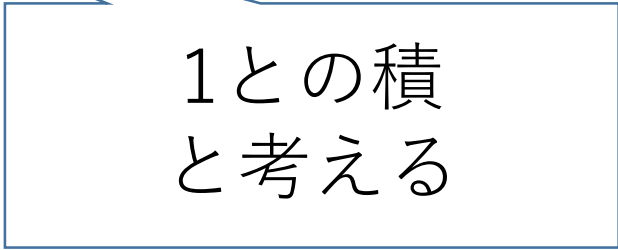


【さらに例題】

$$\int \log x \, dx =$$

【さらに例題】

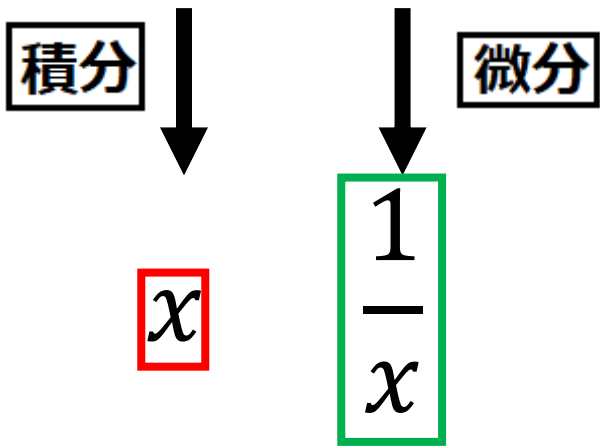
$$\int 1 \cdot \log x \, dx =$$



1との積
と考える

【さらに例題】

$$\int \boxed{1} \cdot \boxed{\log x} dx =$$



【さらに例題】

$$\int 1 \cdot \log x \, dx = \underline{x \log x} \quad \textcircled{1}$$

x

①

$\frac{1}{x}$

【さらに例題】

$$\int 1 \cdot \log x \, dx = x \log x - \int \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{\textcircled{2}} \, dx$$

$$\boxed{x} \overset{\textcircled{2}}{\text{---}} \boxed{\frac{1}{x}}$$

【さらに例題】

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \log x \, dx &= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \log x - x + C\end{aligned}$$

【さらに例題】

$$\int 1 \cdot \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$
$$= x \log x - x + C$$

よく登場するので
覚えても良い

【練習タイム】

教科書の練習10をやってみよう

答えは次のページ

【答え】

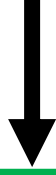
$$\int \boxed{1} \cdot \boxed{\log(x+1)} dx = (x+1) \log(x+1) - x + C$$

積分



$$\boxed{x+1}$$

微分



$$\boxed{\frac{1}{x+1}}$$

【課題】

4 STEPの

3 8 1、 3 8 3

をやりましょう