

数学Ⅲ第7章 「積分法」その7

「親分子分」を習得せよ

※ 習得するのにかなり時間がかかります

【公式】

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

ただし、 $g(x) = u$

【しかし…】

公式を見ると難しく感じますが、
簡単に言うと

置換積分の置き換えの工夫バージョン

です

【例題】

$$\int x\sqrt{x^2 + 1} dx$$

を求める

【例題】

$$x^2 + 1 = t$$

とおくと

【例題】

$$x^2 + 1 = t$$

とおくと

$$2x \frac{dx}{dt} = 1$$

両辺 t で微分する

左辺は合成関数の微分と同じです
(x で微分した後、 $\frac{dx}{dt}$ をくっつける)

【例題】

とおくと

$$x^2 + 1 = t$$

$$2x \frac{dx}{dt} = 1$$

両辺 dt 倍する

$$2x dx = dt$$

【例題】

とおくと

$$x^2 + 1 = t$$

$$2x \frac{dx}{dt} = 1$$

$$2x dx = dt$$

$$x dx = \frac{1}{2} dt$$

両辺 $\frac{1}{2}$ 倍する

【例題】

とおくと

$$x^2 + 1 = t$$

$$2x \frac{dx}{dt} = 1$$

$$2x dx = dt$$

$$x dx = \frac{1}{2} dt$$

【例題】

$$\int \boxed{x} \sqrt{x^2 + 1} \boxed{dx} = \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt$$

前ページのそれぞれに代入

【例題】

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2+1} dx &= \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

【例題】

$$\int x\sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3} (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} + C$$

xの式に戻す

【練習タイム】

教科書の練習7をやってみよう

ちよつと

待った

!!

【分析】

今回の積分は t で置き換える式の微分の結果が問題の中（被積分関数）に存在する

$$\int x \sqrt{x^2 + 1} dx$$

$x^2 + 1 = t$ だから

$$(x^2 + 1)' = 2x$$

x は被積分関数に
すでにいる

【分析】

この被積分関数を次のように名付ける

$$\int \boxed{x} \boxed{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

子分

親分

【分析】

親分の微分（またはその一部）が子分になっている積分は、置換する際に子分が吸収されてしまったので、**実際は親分のみの積分になっている**

$$\int \boxed{x} \boxed{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{1}{2} \int \boxed{\sqrt{t}} dt$$

子分

親分

文字は変わったが
元親分

【分析】

つまり、この「親分子分」の形になっている場合のみ、親分にのみ注目すれば、

置換積分を使わなくてもそのまま積分できる

ということになる

【再度例題】

$$\int x\sqrt{x^2 + 1} dx$$

を求める

【再度例題】

子分は
無視

$$\int x \sqrt{x^2 + 1} dx =$$

親分のみ注目

【再度例題】

$$\int x\sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$$

まず親分の積分を
作成中

【再度例題】

$$\int x \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left\{ \frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right\}' = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

次に作ったものを微分

するとこれだけ問題にない
(じゃま)

【再度例題】

$$\int x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{2} + C$$

(じゃま) を打ち消す

【再度例題】

$$\int x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{2} + C$$
$$= \dots \quad (\text{略})$$

【例題】

$$\int \cos^2 x \sin x dx$$

を求める

どちらが親分でどちらが子分か？

【例題】

$$\int \cos^2 x \sin x dx$$

The diagram shows the integral $\int \cos^2 x \sin x dx$. The term $\cos^2 x$ is enclosed in a red box, and the term $\sin x$ is enclosed in a blue box. Below the red box is a blue-outlined box containing the text '親分' (parent part). Below the blue box is a blue-outlined box containing the text '子分' (child part). Two blue lines connect the top corners of these boxes to the bottom corners of the red and blue boxes respectively, indicating the relationship between the parts.

を求める

【例題】

子分は
無視

$$\int \cos^2 x \sin x dx =$$

親分のみ注目

【例題】

$$\int \cos^2 x \sin x dx = \frac{1}{3} \cos^3 x$$

まず親分の積分を
作成中

【例題】

$$\int \cos^2 x \sin x dx = \frac{1}{3} \cos^3 x$$

$$\left(\frac{1}{3} \cos^3 x \right)' = \cos^2 x \cdot (-\sin x)$$

次に作ったものを微分

するとこれだけ問題にない
(じゃま)

【例題】

$$\int \cos^2 x \sin x dx = \frac{1}{3} \cos^3 x \times (-1) + C$$

(じゃま) を打ち消す

【例題】

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \sin x \, dx &= \frac{1}{3} \cos^3 x \times (-1) + C \\ &= -\frac{1}{3} \cos^3 x + C\end{aligned}$$

【練習タイム】

教科書の練習7をやってみよう

答えは次のページ

【答え】

(1) 親分： $\sqrt{x^2 + 2}$

子分： $3x^2$

$$\frac{2}{3}(x^3 + 2)\sqrt{x^3 + 2} + C$$

【答え】

(2) 親分： $\sqrt{1-x^2}$

子分： x

$$-\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2} + C$$

【答え】

(3) 親分： $\sin^3 x$

子分： $\cos x$

$$\frac{1}{4} \sin^4 x + C$$

【答え】

(4) 親分： $\tan x$

子分： $\frac{1}{\cos^2 x}$

$$\frac{1}{2} \tan^2 x + C$$

【答え】

(5) 親分： $\log x$

子分： $\frac{1}{x}$

$$\frac{1}{2} (\log x)^2 + C$$

【答え】

(6) 親分： e^{x^3}

子分： x^2

$$\frac{1}{3}e^{x^3} + C$$

【課題】

4 STEPの

379、380

の途中までをやりましょう