数学Ⅲ第７章
「積分法」その７

「親分子分」を習得せよ
※ 習得するのにかなり時間がかかります

【公式】

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

ただし、$g(x) = u$

【しかし…】
公式を見ると難しく感じますが、
簡単に言うと

置換積分の置き換えの工夫バージョン

です

【例題】

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$$

を求める

【例題】

$$x^2 + 1 = t$$

とおくと

【例題】

$$x^2+1=t$$

とおくと

$$2x\frac{dx}{dt}=1$$

両辺tで微分する

左辺は合成関数の微分と同じです
（xで微分した後、$\frac{dx}{dt}$をくっつける）

【例題】

$$x^2 + 1 = t$$

とおくと

$$2x\frac{dx}{dt} = 1$$

両辺dt倍する

$$2xdx = dt$$

【例題】

$$x^2 + 1 = t$$

とおくと

$$2x\frac{dx}{dt} = 1$$

$$2xdx = dt$$

$$xdx = \frac{1}{2}dt$$

両辺 $\frac{1}{2}$ 倍する

【例題】

$$\boxed{x^2 + 1 = t}$$

とおくと

$$2x\frac{dx}{dt} = 1$$

$$2xdx = dt$$

$$\boxed{xdx = \frac{1}{2}dt}$$

【例題】

$$\int \boxed{x}\,\boxed{\sqrt{x^2+1}}\,\boxed{dx} = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt$$

前ページのそれぞれに代入

【例題】

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C$$

【例題】

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$$

xの式に戻す

【練習タイム】

教科書の練習７をやってみよう

ちょっと
待った
！！

【分析】

今回の積分はtで置き換える式の微分の結果が問題の中（被積分関数）に存在する

$$\int \boxed{x}\sqrt{x^2+1}\,dx$$

$x^2+1=t$だから

$$(x^2+1)' = 2\boxed{x}$$

xは被積分関数にすでにいる

【分析】

この被積分関数を次のように名付ける

$$\int \boxed{x}\ \boxed{\sqrt{x^2+1}}\ dx$$

子分　　親分

【分析】

親分の微分（またはその一部）が子分になっている積分は、置換する際に子分が吸収されてしまったので、実際は親分のみの積分になっている

$$\int \boxed{x}\,\boxed{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \boxed{\sqrt{t}}\,dt$$

子分

親分

文字は変わったが
元親分

【分析】

つまり、この「親分子分」の形になっている場合のみ、親分にのみ注目すれば、

置換積分を使わなくてもそのまま積分できる

ということになる

【再度例題】

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$$

を求める

【再度例題】

子分は
無視

$$\int x\boxed{\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$

親分のみ注目

【再度例題】

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

まず親分の積分を
作成中

【再度例題】

$$\int \boxed{x}\boxed{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left\{\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right\}' = \boxed{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \boxed{2}\boxed{x}$$

次に作ったものを微分

するとこれだけ問題にない
（じゃま）

【再度例題】

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} \times \boxed{\frac{1}{2}} + C$$

（じゃま）を打ち消す

【再度例題】

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{2} + C$$

$$= \cdots$$ （略）

【例題】

$$\int \cos^2 x \sin x \, dx$$

を求める

どちらが親分でどちらが子分か？

【例題】

$$\int \boxed{\cos^2 x}\ \boxed{\sin x}\, dx$$

親分

子分

を求める

【例題】

子分は
無視

$$\int \boxed{\cos^2 x} \sin x \, dx =$$

親分のみ注目

【例題】

$$\int \cos^2 x \sin x \, dx = \frac{1}{3} \cos^3 x$$

まず親分の積分を
作成中

【例題】

$$\int \boxed{\cos^2 x}\,\boxed{\sin x}\,dx = \frac{1}{3}\cos^3 x$$

$$\left(\frac{1}{3}\cos^3 x\right)' = \boxed{\cos^2 x}\cdot(\boxed{-}\boxed{\sin x})$$

次に作ったものを微分

するとこれだけ問題にない
（じゃま）

【例題】

$$\int \cos^2 x \sin x \, dx = \frac{1}{3}\cos^3 x \times \boxed{(-1)} + C$$

（じゃま）を打ち消す

【例題】

$$\int \cos^2 x \sin x \, dx = \frac{1}{3}\cos^3 x \times (-1) + C$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

【練習タイム】
教科書の練習７をやってみよう

答えは次のページ

【答え】

(1) 親分：$\sqrt{x^2+2}$

子分：$3x^2$

$$\frac{2}{3}(x^3+2)\sqrt{x^3+2}+C$$

【答え】

(2) 親分：$\sqrt{1-x^2}$

子分：x

$$-\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}+C$$

【答え】

(3) 親分：$\sin^3 x$

子分：$\cos x$

$$\frac{1}{4}\sin^4 x + C$$

【答え】

(4) 親分：$\tan x$

子分：$\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$\frac{1}{2}\tan^2 x + C$$

【答え】

(5) 親分：$\log x$

子分：$\dfrac{1}{x}$

$$\frac{1}{2}(\log x)^2+C$$

【答え】

(6) 親分：e^{x^3}

子分：x^2

$$\frac{1}{3}e^{x^3}+C$$

【課題】

４STEPの

３７９、３８０

の途中までをやりましょう