

数学Ⅲ第7章 「積分法」その6

「置換積分」を習得せよ

※ 積分における奥義のようなもの

【はじめに】

$$y = \int f(x) dx$$

が簡単に計算できないとき、

$$x = g(t)$$

を使って式の置き換えをする

【はじめに】

$$y' = \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= f(x)g'(t)$$

$$= f(g(t))g'(t)$$

したがって、

【公式】 「置換積分」と言う

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

ただし、 $x = g(t)$

【例題】

$$\int x\sqrt{x+1} dx$$

を求める

【例題】

$$\int x\sqrt{x+1} dx$$

を求める

問題を見たときの印象として、

√がなんかいやだな

と感じた

【例題】

$$\sqrt{x + 1} = t$$

とおくと

$$x = t^2 - 1$$

【例題】

とおくと

$$\sqrt{x + 1} = t$$

$$x = t^2 - 1$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$

両辺 t で微分する

【例題】

とおくと

$$\sqrt{x + 1} = t$$

$$x = t^2 - 1$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$

両辺 dt 倍する

$$dx = 2t dt$$

【例題】

とおくと

$$\sqrt{x + 1} = t$$

$$x = t^2 - 1$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$

$$dx = 2t dt$$

【例題】

$$\int \boxed{x} \boxed{\sqrt{x+1}} \boxed{dx} = \int (t^2 - 1)t \cdot 2t dt$$

前ページのそれぞれに代入

【例題】

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1} dx &= \int (t^2 - 1)t \cdot 2t dt \\ &= 2 \int (t^4 - t^2) dt\end{aligned}$$

【例題】

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1} dx &= \int (t^2 - 1)t \cdot 2t dt \\ &= 2 \int (t^4 - t^2) dt \\ &= 2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) + C\end{aligned}$$

【例題】

$$\int x\sqrt{x+1} dx = \int (t^2 - 1)t \cdot 2t dt$$

$$= 2 \int (t^4 - t^2) dt$$

$$= 2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) + C$$

$$= \frac{2}{15} t^3 (3t^2 - 5) + C$$

まとめたほうが
この後が楽

【例題】

$$\int x\sqrt{x+1} dx = \int (t^2 - 1)t \cdot 2t dt$$

$$= 2 \int (t^4 - t^2) dt$$

$$= 2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) + C$$

$$= \frac{2}{15} t^3 (3t^2 - 5) + C$$

$$= \frac{2}{15} (3x - 2)(x + 1)\sqrt{x + 1} + C$$

xの式に戻す

【練習タイム】

教科書の練習 6 をやってみよう

答えは次のページ

【答え】

$$(1) \quad \frac{1}{15} (3x - 1)(2x + 1)\sqrt{2x + 1} + C$$

$$(2) \quad -\frac{2}{3} (x + 2)\sqrt{1 - x} + C$$

【課題】

4 STEPの

3 7 7、 3 7 8

をやりましょう