確認テスト（第3節　軌跡と領域）（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$～$\boxed{2}$ ×4点　$\boxed{3}$ ×5点 【目標時間30分】 できない問題があったらもう一度教科書を見て復習する！	／50点

$\boxed{1}$ 次の点の軌跡を求めよ。

(1)　2点A$(-3,\ 0)$，B$(3,\ 0)$からの距離の比が1:3である点P

(2)　2点A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 4)$から等距離にある点P

(3)　点A$(4,\ 2)$と円$x^2+y^2=4$上の点Qとを結ぶ線分AQの中点P

(4)　点B$(2,\ -2)$と放物線$y=x^2$上の点Qとを結ぶ線分BQを1：2の比に内分する点P

(5)　aの値が変化するとき，放物線$y=x^2-ax+a^2$の頂点P

$\boxed{2}$ 次の不等式の満たす領域を図示せよ。

(1)　$3x-2y+6\leqq 0$

(2)　$x^2+y^2-4x+6y<0$

(3)　$\begin{cases} y<x^2 \\ y<x+2 \end{cases}$

(4)　$(x+y-6)(y-x^2)<0$

(5)　$y\geqq|2x-6|$

$\boxed{3}$ (1)　$x,\ y$が不等式$x+y\leqq 3$，$x-2y\leqq 0$，$2x-y\geqq -6$を同時に満たすとき，$y-x$の最大値と最小値を求めよ。

(2)　$x,\ y$が不等式$(x-1)^2+y^2\leqq 1$を満たすとき，$x-y$の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{1}$

求める軌跡を(x,y)とおく

点$P(x,y)$とおく

(1) $AP : BP = 1 : 3$

$\therefore\ 3AP = BP$

$\therefore\ 9AP^2 = BP^2$

キョリの公式は、√の形なので、先に2乗しておくと計算がラク!

$$9\left((x+3)^2+y^2\right) = (x-3)^2+y^2$$

$$\therefore\ 8x^2+60x+8y^2+72=0$$

$$x^2+\frac{15}{2}x+y^2+9=0$$

$$\left(x-\frac{15}{4}\right)^2+y^2=\frac{81}{16}$$

これは逆も成り立つ

$\boxed{\text{中心}\left(\frac{15}{4},0\right)、\text{半径}\ \frac{9}{4}\ \text{の円}}$

求めるものは軌跡、軌跡の方程式ではないので図形を答える

(2) 点$P(x,y)$とおく

$AP = BP$

$\therefore\ AP^2 = BP^2$

$$\therefore\ (x+1)^2+y^2=(x-1)^2+(y-4)^2$$

$$\therefore\ x+2y-4=0$$

これは逆も成り立つ

$\boxed{\text{直線}\ x+2y-4=0}$

他に動点があるときは、(x,y)以外の文字でおく。

(3) 点$P(x,y)$、点$Q(s,t)$とおく

点Qは円上の点より $s^2+t^2=4$ …(#)

点Pは、AQの中点より

$$\begin{cases} x=\dfrac{4+s}{2} \\ y=\dfrac{2+t}{2} \end{cases} \qquad \therefore\ s=2x-4,\quad t=2y-2$$

(#)に代入して

$$(2x-4)^2+(2y-2)^2=4$$

$$4(x-2)^2+4(y-1)^2=4$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2=1$$

$(2x-4)^2 = \{2(x-2)\}^2 = 4(x-2)^2$

$\boxed{\text{中心}(2,1)\ \text{半径}\ 1\ \text{の円}}$ これは逆も成り立つ

(4) 点$P(x,y)$、点$Q(s,t)$とおく

(3)と同じようにおく

点Qは放物線上の点より

$t=s^2$ …(#)

点Pは、BQを1:2に内分する点なので

$$\begin{cases} x=\dfrac{2\cdot 2+1\cdot s}{1+2} & \therefore\ s=3x-4 \\ y=\dfrac{2\cdot(-2)+1\cdot t}{1+2} & \therefore\ t=3y+4 \end{cases}$$

(#)に代入して

$$(3y+4)=(3x-4)^2$$

$$\therefore\ y=3x^2-8x+4$$

これは逆も成り立つ

$\boxed{\text{放物線}\ y=3x^2-8x+4}$

(5) 点$P(x,y)$とおく

$$y=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2$$

$$\therefore\ \begin{cases} x=\dfrac{a}{2} & \therefore\ a=2x \\ y=\dfrac{3}{4}a^2 \end{cases}$$

よって、$y=\dfrac{3}{4}\cdot(2x)^2=3x^2$

これは逆も成り立つ

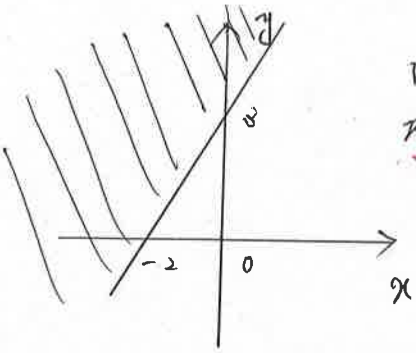
$\boxed{\text{放物線}\ y=3x^2}$

(2)の求める軌跡は線分ABの垂直二等分線であることに気づけただろうか?
気づけた人は他の方法でも求めてみよう。

$\boxed{2}$

(1) $y \geqq \frac{3}{2}x+3$

直線
$y \geqq$ ○ 上
$y \leqq$ ○ 下

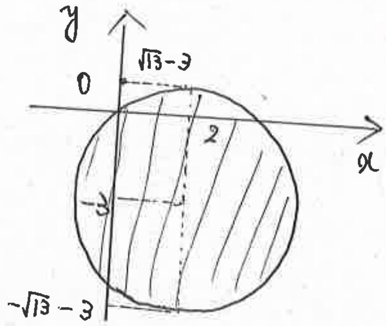


図の斜線部
境界線を含む．

必ずかく．

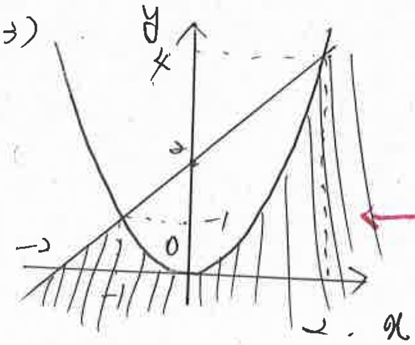
(2) $(x-2)^2+(y+3)^2<13$

円
〜〜 < ○ 内部
〜〜 > ○ 外部



図の斜線部
境界線は含まない

(3)

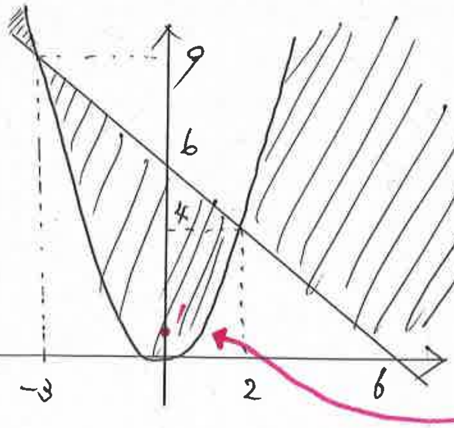


図の斜線部
境界線は含まない

共通するところに斜線をひく

(4) $\begin{cases} x+y-6<0 \\ y-x^2>0 \end{cases}$ or $\begin{cases} x+y-6>0 \\ y-x^2<0 \end{cases}$

$(x+y-6)(y-x^2)<0$
正 × 負
負 × 正

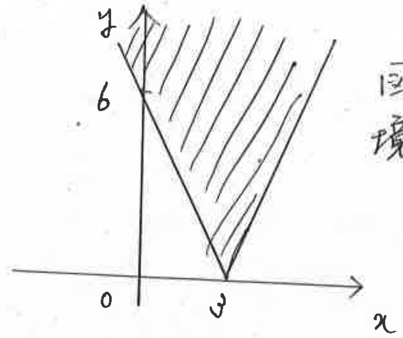


図の斜線部
境界線は含まない

(　　×　　)>0 のような
積の形の領域は(4)のように
市松模様になる．

これを知っていれば，
例えば，(0,1)という点は，
(4)を満たすので，
その領域をぬり，隣の領域は
ぬらない
という風に交互にぬれば答えとなる

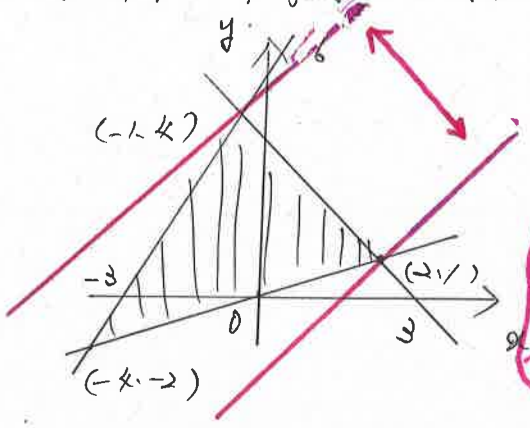
(5)



図の斜線部
境界線を含む．

$\boxed{3}$

(1) 与えられた不等式は下図の領域.



y=x+kを領域に通るように動かして y切片のMax minを見る

$y-x=k$ とおくと 求めるものは, k の最大値と最小値

ここで,

$y=x+k$ と変形すると

傾き1, y切片がkであることが分かるので.

必ず確認する

最大値は $(-1, 4)$ を通るとき

∴ 最大値 5 $(x=-1,\ y=4)$

最小値は $(2, 1)$ を通るとき

最小値 -1 $(x=2,\ y=1)$.

最大値 5 $(x=-1,\ y=4)$
最小値 -1 $(x=2,\ y=1)$

(別解) $x-y-k=0$ と $(1, 0)$ の距離が半径と一致すればよいので

$$d=\frac{|1-0-k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{|1-k|}{\sqrt{2}}$$

$r=1$ より $\dfrac{|1-k|}{\sqrt{2}}=1$

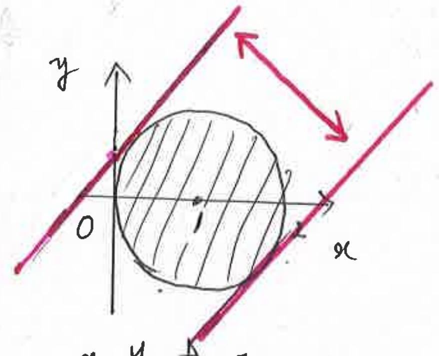
∴ $|1-k|=\sqrt{2}$

$1-k=\pm\sqrt{2}$

∴ $k=1\pm\sqrt{2}$

点と直線の距離の公式の方が楽ですが, x, yの値が必要なときは, 右の解き方がよい.

(2) 与えられた不等式は下図の領域.



$x-y=k$ とおく,

∴ $y=x-k$ —(＊)

これは傾き1, y切片が$-k$である.

必ず確認する

よって 最大値・最小値は この直線が円と接するときなので

(＊)を円の方程式に代入して

$(x-1)^2+(x-k)^2=1$

∴ $2x^2-2(k+1)x+k^2=0$ —(※)

が重解をもてばよい

判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=(k+1)^2-2\times k^2$$

$$=-k^2+2k+1$$

$D=0$より

$-k^2+2k+1=0$

∴ $k^2-2k-1=0$

∴ $k=1\pm\sqrt{2}$

$ax^2+bx+c=0$ の重解 $x=-\dfrac{b}{2a}$

また, (※)が重解をもつとき その解は

$$x=-\frac{-2(k+1)}{2\times 2}=\frac{k+1}{2},$$

(＊)に代入して, $y=\dfrac{-k+1}{2}$ に注意して

最大値 $1+\sqrt{2}$ $\left(x=\frac{\sqrt{2}}{2}+1,\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
最小値 $1-\sqrt{2}$ $\left(x=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1,\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$