三角比は正弦定理、余弦定理、三角形の面積(二通り）の公式を覚えておけば、比較的解きやすい分野です。ただし、図形の性質も融合して考えることも多々あるので、必ず「条件通りに作図」して、それでも解決方針がたたなければ「補助線」を引いてみましょう！

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training91]

$y=mx^2+(m+1)x+m$ …… ① は 2 次関数であるから　　$m \neq 0$

2 次方程式 $mx^2+(m+1)x+m=0$ の判別式を D とすると

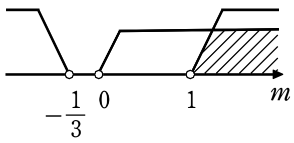
$$D=(m+1)^2-4\cdot m\cdot m=-3m^2+2m+1$$

① の y の値が常に正になるための条件は　　$m>0$ かつ $D<0$

$D<0$ から　　$-3m^2+2m+1<0$

ゆえに　　$(3m+1)(m-1)>0$

したがって　　$m<-\dfrac{1}{3}$，$1<m$



よって，求める m の値の範囲は　　$m>1$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training93]

直線 $y=ax-3$ と放物線 $y=x^2-4x+3a$ が接するための条件は，方程式

$ax-3=x^2-4x+3a$ すなわち $x^2-(4+a)x+3a+3=0$ の判別式を D とすると

$D=0$

$D=\{-(4+a)\}^2-4\cdot 1\cdot(3a+3)=a^2-4a+4$ であるから　　$a^2-4a+4=0$

これを解いて　　$a=2$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training105]

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2}{3}$ の両辺を 2 乗すると　　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

よって　　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{9}$　　　ゆえに　　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{5}{18}$

(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$$=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{5}{18}\right)\right\}=\frac{23}{27}$$

(3)　$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\cdot\left(-\dfrac{5}{18}\right)=\dfrac{14}{9}$

ここで，(1) から $\sin\theta\cos\theta<0$ であり，$0°<\theta<180°$ のとき $\sin\theta>0$ であるから

$\cos\theta<0$　　　ゆえに　　$\sin\theta-\cos\theta>0$

よって　　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{14}}{3}$

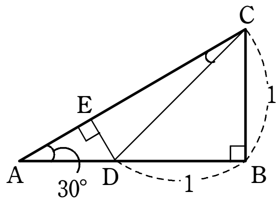
(4)　$\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta}=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{14}}{3}\right)\div\left(-\frac{5}{18}\right)=-\frac{4\sqrt{14}}{5}$$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training107]

(1)　△ABC は ∠A＝30°，∠B＝90°，BC＝1 の直角三角形であるから　　$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$

よって　　$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}-\mathrm{BD}=\sqrt{3}-1$



(2)　直角三角形 ADE において

$$\mathrm{DE}=\mathrm{AD}\sin 30°=(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

(3)　直角三角形 CDE において　　$\sin\angle\mathrm{DCE}=\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{CD}}$

ここで，△BCD は BC＝BD＝1 の直角二等辺三角形であるから　　$\mathrm{CD}=\sqrt{2}$

よって　　$\sin\angle\mathrm{DCE}=\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{CD}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\div\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\boxed{\text{参考}}$　∠BCD＝45° であるから　　∠DCE＝60°－∠BCD＝60°－45°＝15°

すなわち，(3) より $\sin 15°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ であることがわかる。

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training115]

正弦定理により　　$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

条件より　　$a:b:c=7:5:3$

ゆえに，$a=7k$，$b=5k$，$c=3k$ $(k>0)$ とおける。

これより，最大の辺は BC であるから，最大の角は A である。

余弦定理により　　$\cos A=\dfrac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\cdot 3k\cdot 5k}=-\dfrac{1}{2}$

よって　　$A=120°$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training117]

(1)　$a<a+2<a+4$ であるから，三角形の成立条件は　　$a+4<(a+2)+a$

よって　　$a>2$

(2)　鈍角三角形となる条件は　　$(a+4)^2>a^2+(a+2)^2$

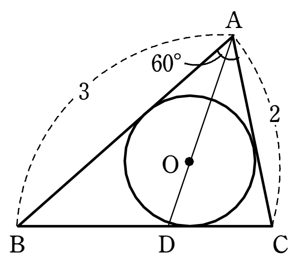
よって　　$a^2-4a-12<0$　　　ゆえに　　$(a+2)(a-6)<0$

したがって　　$-2<a<6$

(1) の結果との共通範囲は　　$2<a<6$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training127]

(1)　$\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin 60°=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$



(2)　余弦定理により

$$\mathrm{BC}^2=3^2+2^2-2\cdot 3\cdot 2\cos 60°$$

$$=9+4-2\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=7$$

BC＞0 であるから　　$\mathrm{BC}=\sqrt{7}$

また ∠BAD＝∠CAD＝30° であり，

△ABC＝△ABD＋△ADC と (1) から

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\cdot 3\mathrm{AD}\sin 30°+\frac{1}{2}\cdot 2\mathrm{AD}\sin 30°$$

よって，$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{AD}$ から　　$\mathrm{AD}=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$

(3)　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})r$ から　　$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5+\sqrt{7}}{2}r$

よって　　$r=\dfrac{3\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}=\dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}$