1

A　正弦・余弦の加法定理

2つの角の和または差の三角関数の値は，それぞれの角の三角関数の値で表すことができる。

まず，次の等式が成り立つことを証明しよう。

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　……①

証明　右の図において，角 $\alpha+\beta$ の動径と単位円の交点をPとすると，Pの座標は

$(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))$

である。2点間の距離の公式により

$AP^2=\{\cos(\alpha+\beta)-1\}^2+\sin^2(\alpha+\beta)=2-2\cos(\alpha+\beta)$

次に，2点P，Aを，原点を中心として

$-\alpha$ だけ回転させた点を，それぞれQ，Rとすると，AP＝RQ である。

Q，Rの座標は，$Q(\cos\beta,\ \sin\beta)$，$R(\cos\alpha,\ -\sin\alpha)$　であるから

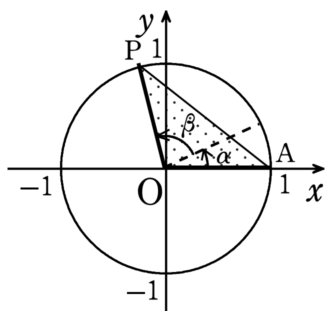
$RQ^2=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta+\sin\alpha)^2$

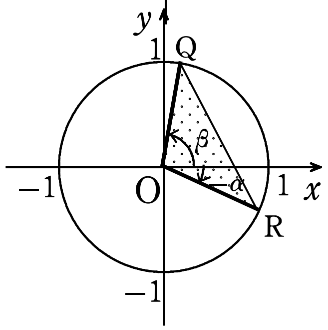
$=2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$

$AP^2=RQ^2$ から

$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$

よって，①が成り立つ。　終





また，等式①の両辺の β を $-\beta$ でおき換えると

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$

125ページの公式2により　　$\cos(-\beta)=\cos\beta$，　$\sin(-\beta)=-\sin\beta$

であるから　　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$　……②

等式②の両辺の α を，$\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ でおき換えると，126ページの問2の公式

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$，　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$　　により

$\cos\left\{\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right\}=\cos\left\{\dfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}=\sin(\alpha+\beta)$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$　，　$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

であるから

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　……③

等式③の両辺の β を $-\beta$ でおき換えると

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

以上のことから，正弦，余弦に関する次の 加法定理 が成り立つ。

正弦，余弦の加法定理

1　$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{cases}$

2　$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$

B　正接の加法定理

正弦と余弦の加法定理から，正接の加法定理を導くことができる。

正接の加法定理

3　$\begin{cases}\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\ \tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{cases}$

証明　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

分母と分子を $\cos\alpha\cos\beta$ で割ると

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

すなわち，第1式が成り立つ。

更に，第1式の β を $-\beta$ でおき換えると，第2式が得られる。　終

2 [327改訂版 数学Ⅱ 例10]

$\sin75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin45^\circ\cos30^\circ+\cos45^\circ\sin30^\circ$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

3 [327改訂版 数学Ⅱ 例11]

$$\tan75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan45^\circ+\tan30^\circ}{1-\tan45^\circ\tan30^\circ}=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

4 [327改訂版 数学Ⅱ 練習26]

加法定理を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\cos 75°$　(2) $\sin 15°$　(3) $\cos 15°$　(4) $\sin 165°$

解説

(1) $\cos 75° = \cos(45°+30°) = \cos 45°\cos 30° - \sin 45°\sin 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\sin 15° = \sin(45°-30°) = \sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(3) $\cos 15° = \cos(45°-30°) = \cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(4) $\sin 165° = \sin(120°+45°) = \sin 120°\cos 45° + \cos 120°\sin 45°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

5 [327改訂版 数学Ⅱ 練習29]

加法定理を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\tan 15°$　(2) $\tan 105°$　(3) $\tan 165°$

解説

(1) $\tan 15° = \tan(45°-30°) = \dfrac{\tan 45° - \tan 30°}{1+\tan 45°\tan 30°}$

$$= \frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

(2) $\tan 105° = \tan(45°+60°) = \dfrac{\tan 45° + \tan 60°}{1-\tan 45°\tan 60°} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-1\cdot\sqrt{3}}$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2-\sqrt{3}$$

(3) $\tan 165° = \tan(120°+45°) = \dfrac{\tan 120° + \tan 45°}{1-\tan 120°\tan 45°} = \dfrac{-\sqrt{3}+1}{1-(-\sqrt{3})\cdot 1} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

$$= \frac{(1-\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{4-2\sqrt{3}}{-2} = -2+\sqrt{3}$$

6 [327改訂版 数学Ⅱ 練習27]

$\dfrac{7}{12}\pi = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$ であることを用いて，$\sin\dfrac{7}{12}\pi$，$\cos\dfrac{7}{12}\pi$ の値を求めよ。

解説

$$\sin\frac{7}{12}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{7}{12}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

7 [327改訂版 数学Ⅱ 例題6]

$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$，$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$，$\cos\beta = \dfrac{12}{13}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$ と $\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

解説

$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$，$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\cos\alpha < 0$，　$\sin\beta > 0$

ゆえに　$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = -\dfrac{4}{5}$

$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2} = \dfrac{5}{13}$

したがって

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} + \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{5}{13} = \frac{16}{65}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$= \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{12}{13} + \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} = -\frac{33}{65}$$

8 [327改訂版 数学Ⅱ 練習28]

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ とする。$\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\sin\beta=\frac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin(\alpha-\beta)$　　　　(2)　$\cos(\alpha+\beta)$

解説

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ であるから　　$\cos\alpha>0$，$\cos\beta<0$

ゆえに　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$

(1)　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{4}{5}=-\frac{6+4\sqrt{5}}{15}$

(2)　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=-\frac{8+3\sqrt{5}}{15}$

9 [327改訂版 数学Ⅱ 練習30]

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$ とする。$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=3$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\tan(\alpha+\beta)$　　　　(2)　$\alpha+\beta$

解説

(1)　$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2+3}{1-2\cdot3}=-1$

(2)　$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$ であるから　　$0<\alpha+\beta<\pi$

よって　　$\alpha+\beta=\frac{3}{4}\pi$

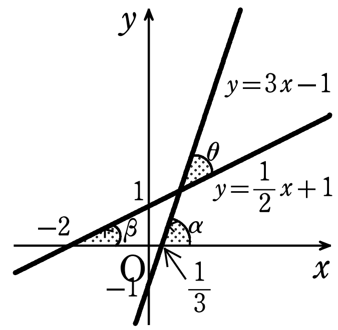
10 [327改訂版 数学Ⅱ 例題7]

2 直線 $y=3x-1$，$y=\frac{1}{2}x+1$ のなす角 θ を求めよ。ただし，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。

解説

右の図のように，2 直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，

求める角 θ は $\alpha-\beta$ である。　$\tan\alpha=3$，$\tan\beta=\frac{1}{2}$



であるから　　$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=1$

ゆえに，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ から　　　$\theta=\frac{\pi}{4}$

11 [327改訂版 数学Ⅱ 練習31]

次の 2 直線のなす角 θ を求めよ。ただし，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。

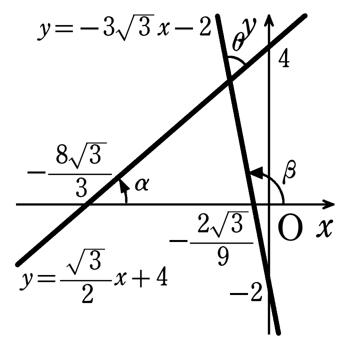
(1)　$y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+4$，$y=-3\sqrt{3}x-2$　　　(2)　$2x-y-1=0$，$x-3y+3=0$

解説

2 直線と x 軸の正の向きとのなす角を順に α，β とする。

(1)　右の図のように，2 直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，

求める角 θ は $\beta-\alpha$ である。$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\beta=-3\sqrt{3}$ であるから

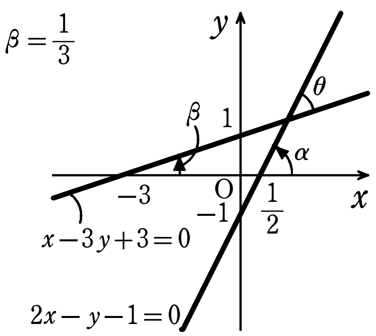


$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{-3\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+(-3\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$

ゆえに，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ から　$\theta=\frac{\pi}{3}$

(2)　右の図のように，2 直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，求める角 θ は $\alpha-\beta$ である。

2 直線の方程式は　$y=2x-1$，$y=\frac{1}{3}x+1$ と変形されるから　$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=\frac{1}{3}$



よって　　$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\cdot\frac{1}{3}}=1$

ゆえに，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ から　$\theta=\frac{\pi}{4}$

12 [327改訂版 数学Ⅱ 本文ページ145]

7　加法定理の応用

A　2倍角の公式

正弦，余弦，正接の加法定理において，β を α でおき換えると，次の 2倍角の公式 が得られる。

2倍角の公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

13 [327改訂版 数学Ⅱ 例題8]

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ のとき，$\sin 2\alpha$ の値を求めよ。

解説

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ であるから　　$\sin\alpha > 0$

よって　$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

ゆえに　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$

14 [327改訂版 数学Ⅱ 練習32]

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 2\alpha$　　(2)　$\cos 2\alpha$　　(3)　$\tan 2\alpha$

解説

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ から　　$\cos\alpha < 0$

よって　$\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = -\frac{2}{3}$

(1)　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$

(2)　$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = -\frac{1}{9}$

(3)　$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{4\sqrt{5}}{9} \div \left(-\frac{1}{9}\right) = 4\sqrt{5}$

別解　(3)　$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3} \div \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ から

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = 4\sqrt{5}$$

15 [327改訂版 数学Ⅱ 問6]

次の等式を証明せよ。

(1)　$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$　　(2)　$\cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha$

解説

(1)　$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$

$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha$

$= 3\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

(2)　$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha$

$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$

$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha) = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha$

16 [327改訂版 数学Ⅱ 練習33]

次の等式を証明せよ。

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+\sin 2\theta$　　(2) $\cos^4\theta-\sin^4\theta=\cos 2\theta$

解説

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+\sin 2\theta$

(2) $\cos^4\theta-\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=1\cdot\cos 2\theta=\cos 2\theta$

17 [327改訂版 数学Ⅱ 本文ページ146]

B　半角の公式

2倍角の公式 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ から

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

また，これらから

$$\tan^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\cdot\frac{2}{1+\cos 2\alpha}=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

ここで，α を $\frac{\alpha}{2}$ でおき換えると，次の 半角の公式 が得られる。

半角の公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$
$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

例12　$\sin\frac{\pi}{8}$ の値

$$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$\sin\frac{\pi}{8}>0$ であるから

$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$　終

18 [327改訂版 数学Ⅱ 練習34]

半角の公式を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\cos\frac{\pi}{8}$　　(2) $\tan\frac{\pi}{8}$

解説

(1) $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

$\cos\frac{\pi}{8}>0$ であるから　$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

(2) $\tan^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=(\sqrt{2}-1)^2$

$\tan\frac{\pi}{8}>0$ であるから　$\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$

19 [327改訂版 数学Ⅱ 練習35]

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ で，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{\alpha}{2}$　　(2) $\cos\frac{\alpha}{2}$　　(3) $\tan\frac{\alpha}{2}$

解説

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ より　$\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$

(1) $\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\sin\frac{\alpha}{2}>0$

よって　$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{4}{5}\right)\right\}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

(2) $\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\cos\frac{\alpha}{2}>0$

よって　$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{5}\right)}=\sqrt{\frac{1}{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

(3) $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}\div\frac{1}{\sqrt{10}}=3$

$\boxed{20}$ [327改訂版 数学Ⅱ 応用例題3]

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\cos 2x = -3\cos x + 1$　　(2) $\cos 2x < -3\cos x + 1$

解説

(1) 2倍角の公式を用いて，左辺を変形すると

$$2\cos^2 x - 1 = -3\cos x + 1$$

移項して整理すると

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

左辺を変形して　$(\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0$

$\cos x \fallingdotseq -2$ であるから

$2\cos x - 1 = 0$　　すなわち　　$\cos x = \frac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　　$x = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

(2) (1) により，与えられた不等式は，次のように変形される。

$$(\cos x + 2)(2\cos x - 1) < 0$$

$\cos x + 2 > 0$ であるから

$2\cos x - 1 < 0$　　すなわち　　$\cos x < \frac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　　$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$

$\boxed{21}$ [327改訂版 数学Ⅱ 練習36]

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $2\cos 2x = 4\sin x - 1$　　(2) $\sin 2x = \sin x$

(3) $\cos 2x \leqq 3\sin x - 1$　　(4) $\cos 2x < \cos x$

解説

(1) 2倍角の公式を用いて，左辺を変形すると　$2(1 - 2\sin^2 x) = 4\sin x - 1$

移項して整理すると　$4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$

左辺を変形して　$(2\sin x - 1)(2\sin x + 3) = 0$

$2\sin x + 3 \fallingdotseq 0$ であるから　$2\sin x - 1 = 0$　　すなわち　$\sin x = \frac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　$x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

(2) 2倍角の公式を用いて，左辺を変形すると　$2\sin x\cos x = \sin x$

移項すると　$2\sin x\cos x - \sin x = 0$

左辺を変形して　$\sin x(2\cos x - 1) = 0$

ゆえに　$\sin x = 0$　または　$2\cos x - 1 = 0$　　すなわち　$\sin x = 0$　または　$\cos x = \frac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　$x = 0,\ \pi$　または　$x = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

したがって　$x = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi$

(3) 2倍角の公式を用いて，左辺を変形すると　$1 - 2\sin^2 x \leqq 3\sin x - 1$

移項して整理すると　$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 \geqq 0$

左辺を変形して　$(\sin x + 2)(2\sin x - 1) \geqq 0$

$\sin x + 2 > 0$ であるから　$2\sin x - 1 \geqq 0$　　すなわち　$\sin x \geqq \frac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　$\frac{\pi}{6} \leqq x \leqq \frac{5}{6}\pi$

(4) 2倍角の公式を用いて，左辺を変形すると　$2\cos^2 x - 1 < \cos x$

移項して　$2\cos^2 x - \cos x - 1 < 0$

左辺を変形して　$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) < 0$

ゆえに　$-\frac{1}{2} < \cos x < 1$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　$0 < x < \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi < x < 2\pi$

22 [327改訂版 数学Ⅱ 本文ページ150]

8　三角関数の合成

A　三角関数の合成

加法定理を用いて，$a\sin\theta+b\cos\theta$ の形の式を変形してみよう。

座標 $(a,\ b)$ である点を P とし，動径 OP と x 軸の正の向きとのなす角を α とする。

また，線分 OP の長さを r とすると

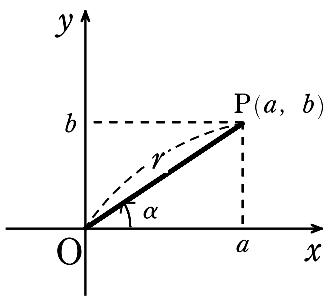
$$a=r\cos\alpha,\quad b=r\sin\alpha$$

よって　$a\sin\theta+b\cos\theta=r\cos\alpha\sin\theta+r\sin\alpha\cos\theta$

$$=r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)=r\sin(\theta+\alpha)$$

ここで，$r=\sqrt{a^2+b^2}$ である。

$a\sin\theta+b\cos\theta$ のこのような変形を 三角関数の合成 という。



三角関数の合成

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし　$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

例 13　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ の変形

$\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ から

$$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$

$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

終

23 [327改訂版 数学Ⅱ 練習37]

次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1)　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$　　　(2)　$\sin\theta-\cos\theta$

解説

(1)　$\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$ から

$$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$

$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

(2)　$\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ から

$$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$$

$$=\sqrt{2}\left\{\sin\theta\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\theta\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

24 [327改訂版 数学Ⅱ 応用例題4]

$0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$$

解説

左辺を変形して　$2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$

よって　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{3}\leqq x-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5}{3}\pi$ であるから，① より

$x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$　　ゆえに　$x=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{7}{6}\pi$

25 [327改訂版 数学Ⅱ 練習38]

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\sin x + \cos x = -1$　　(2) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{3}$

解説

(1) 左辺を変形して　$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$

よって　$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ……①

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき $\frac{\pi}{4} \leqq x+\frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$ であるから，① より　$x+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

ゆえに　$x=\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

(2) 左辺を変形して　$2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$

よって　$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ……①

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき $-\frac{\pi}{6} \leqq x-\frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$ であるから，① より　$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$

ゆえに　$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi$

26 [327改訂版 数学Ⅱ 問7]

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，不等式 $\sin x - \sqrt{3}\cos x > 1$ を解け。

解説

左辺を変形して　$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)>1$

よって　$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)>\frac{1}{2}$ ……①

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき $-\frac{\pi}{3} \leqq x-\frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$ であるから，この範囲で

$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

を満たす $x-\frac{\pi}{3}$ の値は　$x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

ゆえに，① から　$\frac{\pi}{6} < x-\frac{\pi}{3} < \frac{5}{6}\pi$

したがって　$\frac{\pi}{2} < x < \frac{7}{6}\pi$

27 [327改訂版 数学Ⅱ 練習39]

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\sin x + \sqrt{3}\cos x < 1$　　(2) $\sqrt{3}\sin x - \cos x \leqq \sqrt{2}$

解説

(1) 左辺を変形して　$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)<1$

よって　$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)<\frac{1}{2}$ ……①

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき $\frac{\pi}{3} \leqq x+\frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$ であるから，この範囲で

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

を満たす $x+\frac{\pi}{3}$ の値は　$x+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$

ゆえに，① から　$\frac{5}{6}\pi < x+\frac{\pi}{3} < \frac{13}{6}\pi$

したがって　$\frac{\pi}{2} < x < \frac{11}{6}\pi$

(2) 左辺を変形して　$2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \leqq \sqrt{2}$

よって　$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ……①

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき $-\frac{\pi}{6} \leqq x-\frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$ であるから，この範囲で

$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

を満たす $x-\frac{\pi}{6}$ の値は　$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$

ゆえに，① から　$-\frac{\pi}{6} \leqq x-\frac{\pi}{6} \leqq \frac{\pi}{4}$，

$\frac{3}{4}\pi \leqq x-\frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$

したがって　$0 \leqq x \leqq \frac{5}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi \leqq x < 2\pi$

28 [327改訂版 数学Ⅱ 応用例題5]
次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$$y=\sin x+\cos x \quad (0\leqq x<2\pi)$$

解説

与えられた関数の式を変形すると　$y=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq x<2\pi$ のとき $\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$ であるから

$-1\leqq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$　　よって　$-\sqrt{2}\leqq y\leqq\sqrt{2}$

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ のとき，$x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ から　$x=\dfrac{\pi}{4}$

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$ のとき，$x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{2}\pi$ から　$x=\dfrac{5}{4}\pi$

ゆえに，この関数は $x=\dfrac{\pi}{4}$ で最大値 $\sqrt{2}$ をとり，

$x=\dfrac{5}{4}\pi$ で最小値 $-\sqrt{2}$ をとる。

29 [327改訂版 数学Ⅱ 練習40]
次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$$y=\sqrt{3}\sin x-\cos x \quad (0\leqq x<2\pi)$$

解説

与えられた関数の式を変形すると　$y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$0\leqq x<2\pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{6}\leqq x-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{11}{6}\pi$ であるから

$-1\leqq\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq 1$　　よって　$-2\leqq y\leqq 2$

また，$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$ のとき　$x=\dfrac{5}{3}\pi$

$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$ のとき　$x=\dfrac{2}{3}\pi$

ゆえに，この関数は $x=\dfrac{2}{3}\pi$ で最大値 2 をとり，$x=\dfrac{5}{3}\pi$ で最小値 -2 をとる。

30 [327改訂版 数学Ⅱ 問8]
関数 $y=\sin x+2\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

解説

与えられた関数の式を変形すると　$y=\sqrt{5}\sin(x+\alpha)$

ただし，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$-1\leqq\sin(x+\alpha)\leqq 1$ より　$-\sqrt{5}\leqq y\leqq\sqrt{5}$

よって，この関数の最大値は $\sqrt{5}$，最小値は $-\sqrt{5}$ である。

31 [327改訂版 数学Ⅱ 練習41]
関数 $y=3\sin x+4\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

解説

与えられた関数の式を変形すると　$y=5\sin(x+\alpha)$

ただし，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$

$-1\leqq\sin(x+\alpha)\leqq 1$ より　$-5\leqq y\leqq 5$

よって，この関数の最大値は 5，最小値は -5 である。

1

A　正弦・余弦の加法定理

2つの角の和または差の三角関数の値は，それぞれの角の三角関数の値で表すことができる。

まず，次の等式が成り立つことを証明しよう。

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots①$$

証明　右の図において，角 $\alpha+\beta$ の動径と単位円の交点をPとすると，Pの座標は

$$(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))$$

である。2点間の距離の公式により

$$AP^2=\{\cos(\alpha+\beta)-1\}^2+\sin^2(\alpha+\beta)=2-2\cos(\alpha+\beta)$$

次に，2点P，Aを，原点を中心として

$-\alpha$ だけ回転させた点を，それぞれQ，Rとすると，AP＝RQ である。

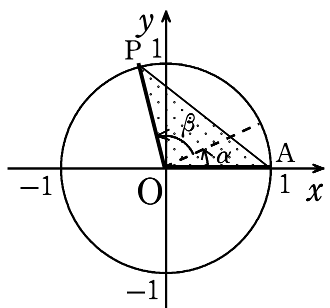
Q，Rの座標は，$Q(\cos\beta,\ \sin\beta)$，$R(\cos\alpha,\ -\sin\alpha)$　であるから

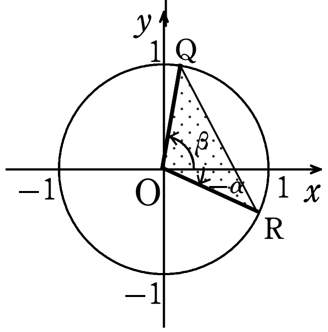
$$RQ^2=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta+\sin\alpha)^2$$
$$=2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$

$AP^2=RQ^2$ から

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$

よって，①が成り立つ。　終





また，等式①の両辺の β を $-\beta$ でおき換えると

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$

125ページの公式2により　　$\cos(-\beta)=\cos\beta$，　$\sin(-\beta)=-\sin\beta$

であるから　　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots②$

等式②の両辺の α を，$\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ でおき換えると，126ページの問2の公式

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta \qquad \text{により}$$

$$\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right\}=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}=\sin(\alpha+\beta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \quad,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

であるから

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots③$$

等式③の両辺の β を $-\beta$ でおき換えると

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

以上のことから，正弦，余弦に関する次の 加法定理 が成り立つ。

正弦，余弦の加法定理

1 $\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{cases}$

2 $\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$

B　正接の加法定理

正弦と余弦の加法定理から，正接の加法定理を導くことができる。

正接の加法定理

3 $\begin{cases}\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\ \tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{cases}$

証明　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

分母と分子を $\cos\alpha\cos\beta$ で割ると

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

すなわち，第1式が成り立つ。

更に，第1式の β を $-\beta$ でおき換えると，第2式が得られる。　終

2 [327改訂版 数学Ⅱ 例10]

$$\sin75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin45^\circ\cos30^\circ+\cos45^\circ\sin30^\circ$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

3 [327改訂版 数学Ⅱ 例11]

$$\tan75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan45^\circ+\tan30^\circ}{1-\tan45^\circ\tan30^\circ}=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

$\boxed{4}$ [327改訂版 数学Ⅱ 練習26]

加法定理を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\cos 75^\circ$　(2) $\sin 15^\circ$　(3) $\cos 15^\circ$　(4) $\sin 165^\circ$

$\boxed{5}$ [327改訂版 数学Ⅱ 練習29]

加法定理を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\tan 15^\circ$　(2) $\tan 105^\circ$　(3) $\tan 165^\circ$

$\boxed{6}$ [327改訂版 数学Ⅱ 練習27]

$\frac{7}{12}\pi=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ であることを用いて，$\sin\frac{7}{12}\pi$，$\cos\frac{7}{12}\pi$ の値を求めよ。

$\boxed{7}$ [327改訂版 数学Ⅱ 例題6]

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$ とする。$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\frac{12}{13}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$ と $\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

$\boxed{8}$ [327改訂版 数学Ⅱ 練習28]

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ とする。$\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\sin\beta=\dfrac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin(\alpha-\beta)$　　(2)　$\cos(\alpha+\beta)$

$\boxed{9}$ [327改訂版 数学Ⅱ 練習30]

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=3$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\tan(\alpha+\beta)$　　(2)　$\alpha+\beta$

$\boxed{10}$ [327改訂版 数学Ⅱ 例題7]

2 直線 $y=3x-1$，$y=\dfrac{1}{2}x+1$ のなす角 θ を求めよ。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

$\boxed{11}$ [327改訂版 数学Ⅱ 練習31]

次の 2 直線のなす角 θ を求めよ。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1)　$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+4$，$y=-3\sqrt{3}x-2$　　(2)　$2x-y-1=0$，$x-3y+3=0$

$\boxed{12}$ [327改訂版 数学Ⅱ 本文ページ145]

７　加法定理の応用

A　２倍角の公式

正弦，余弦，正接の加法定理において，β を α でおき換えると，次の２倍角の公式が得られる。

２倍角の公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$\boxed{13}$ [327改訂版 数学Ⅱ 例題8]

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ のとき，$\sin 2\alpha$ の値を求めよ。

$\boxed{14}$ [327改訂版 数学Ⅱ 練習32]

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 2\alpha$　　(2)　$\cos 2\alpha$　　(3)　$\tan 2\alpha$

$\boxed{15}$ [327改訂版 数学Ⅱ 問6]

次の等式を証明せよ。

(1)　$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$　　(2)　$\cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha$

$\boxed{16}$ [327改訂版 数学Ⅱ 練習33]

次の等式を証明せよ。

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+\sin 2\theta$　　(2) $\cos^4\theta-\sin^4\theta=\cos 2\theta$

$\boxed{17}$ [327改訂版 数学Ⅱ 本文ページ146]

B　半角の公式

2倍角の公式 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ から

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

また，これらから

$$\tan^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\cdot\frac{2}{1+\cos 2\alpha}=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

ここで，α を $\frac{\alpha}{2}$ でおき換えると，次の 半角の公式 が得られる。

半角の公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

例12　$\sin\frac{\pi}{8}$ の値

$$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$\sin\frac{\pi}{8}>0$ であるから

$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$ 終

$\boxed{18}$ [327改訂版 数学Ⅱ 練習34]

半角の公式を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\cos\frac{\pi}{8}$　　(2) $\tan\frac{\pi}{8}$

$\boxed{19}$ [327改訂版 数学Ⅱ 練習35]

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ で，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{\alpha}{2}$　　(2) $\cos\frac{\alpha}{2}$　　(3) $\tan\frac{\alpha}{2}$

20 [327改訂版 数学Ⅱ 応用例題3]

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\cos 2x = -3\cos x + 1$　　(2)　$\cos 2x < -3\cos x + 1$

21 [327改訂版 数学Ⅱ 練習36]

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$2\cos 2x = 4\sin x - 1$　　(2)　$\sin 2x = \sin x$

(3)　$\cos 2x \leqq 3\sin x - 1$　　(4)　$\cos 2x < \cos x$

22 [327改訂版 数学Ⅱ 本文ページ150]

８　三角関数の合成

A　三角関数の合成

加法定理を用いて，$a\sin\theta+b\cos\theta$ の形の式を変形してみよう。

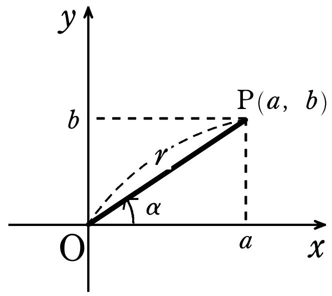
座標$(a,\ b)$ である点をPとし，動径OPと x 軸の正の向きとのなす角を α とする。

また，線分OPの長さを r とすると

$a=r\cos\alpha$，　$b=r\sin\alpha$

よって　$a\sin\theta+b\cos\theta=r\cos\alpha\sin\theta+r\sin\alpha\cos\theta$

$=r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)=r\sin(\theta+\alpha)$



ここで，$r=\sqrt{a^2+b^2}$ である。

$a\sin\theta+b\cos\theta$ のこのような変形を 三角関数の合成 という。

三角関数の合成

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし　$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

例 13　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ の変形

$\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ から

$$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$

$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

終

23 [327改訂版 数学Ⅱ 練習37]

次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1)　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$　　(2)　$\sin\theta-\cos\theta$

24 [327改訂版 数学Ⅱ 応用例題4]

$0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$$

2年（　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

$\boxed{25}$ [327改訂版 数学Ⅱ 練習38]

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\sin x + \cos x = -1$　　(2) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{3}$

$\boxed{26}$ [327改訂版 数学Ⅱ 問7]

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，不等式 $\sin x - \sqrt{3}\cos x > 1$ を解け。

$\boxed{27}$ [327改訂版 数学Ⅱ 練習39]

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\sin x + \sqrt{3}\cos x < 1$　　(2) $\sqrt{3}\sin x - \cos x \leqq \sqrt{2}$

28 [327改訂版 数学Ⅱ 応用例題5]

次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$$y=\sin x+\cos x \quad (0\leqq x<2\pi)$$

29 [327改訂版 数学Ⅱ 練習40]

次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$$y=\sqrt{3}\sin x-\cos x \quad (0\leqq x<2\pi)$$

30 [327改訂版 数学Ⅱ 問8]

関数 $y=\sin x+2\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

31 [327改訂版 数学Ⅱ 練習41]

関数 $y=3\sin x+4\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。