# 接線と法線〜不等式への応用までの答え

**1** 接点の座標を $(t,\ t+e^t)$ とおく。

$y'=1+e^x$ であるから，点 $(t,\ t+e^t)$ における接線の方程式は

$$y-(t+e^t)=(1+e^t)(x-t)$$

これが原点を通るから　$-(t+e^t)=-t(1+e^t)$

すなわち　$(t-1)e^t=0$　　$e^t\neq 0$ であるから　$t=1$

よって，求める接点の座標は　$(1,\ 1+e)$

**2** (1)　$y=\sqrt{x}$ から　$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\mathrm{T}_1$ における $C$ の接線の方程式は　$y-1=\dfrac{1}{2}(x-1)$　すなわち　$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

よって　$\mathrm{P}_2\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$

$\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}$ とすると，$x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ であるから　$\mathrm{T}_2\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$

また，$\mathrm{T}_2$ における $C$ の接線の方程式も同様にして　$y=x+\dfrac{1}{4}$

よって　$\mathrm{P}_3\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$　　ゆえに　$\mathrm{T}_3\left(\dfrac{1}{16},\ \dfrac{1}{4}\right)$

(2)　$\mathrm{P}_n(0,\ a_n)$ とする。

$\sqrt{x}=a_n$ とすると，$x=a_n{}^2$ であるから　$\mathrm{T}_n(a_n{}^2,\ a_n)$

また　$a_n>0$

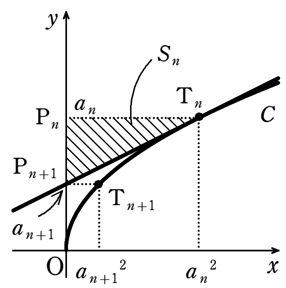
$\mathrm{T}_n$ における $C$ の接線の方程式は

$$y-a_n=\frac{1}{2\sqrt{a_n{}^2}}(x-a_n{}^2)$$

すなわち　$y=\dfrac{1}{2a_n}x+\dfrac{1}{2}a_n$

よって　$\mathrm{P}_{n+1}\left(0,\ \dfrac{1}{2}a_n\right)$

ゆえに　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$　……①




数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=1$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad\cdots\cdots②$$

したがって　$\mathrm{P}_n\left(0,\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$，　$\mathrm{T}_n\left(\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1},\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

(3)　①，② から　$S_n=\dfrac{1}{2}a_n{}^2(a_n-a_{n+1})=\dfrac{1}{2}a_n{}^2\cdot\dfrac{1}{2}a_n=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{8}\right)^{n-1}$

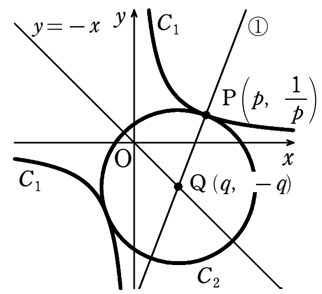
よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は初項 $\dfrac{1}{4}$，公比 $\dfrac{1}{8}$ の無限等比級数であり，$\left|\dfrac{1}{8}\right|<1$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{2}{7}$$

**3** (1)　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$ であるから，点 P における $C_1$ の法線の方程式は　$y-\dfrac{1}{p}=p^2(x-p)$

すなわち　$y=p^2x-p^3+\dfrac{1}{p}$　……①

(2)　$C_2:(x-q)^2+(y+q)^2=r^2$　……②　とする。




$C_1$，$C_2$ はともに直線 $y=-x$ に関して対称であるから，$C_1$，$C_2$ の共有点が 2 個になるのは，$C_1$，$C_2$ が接するときである。

このとき，接点を $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ とすると，P における $C_1$ の法線は円 $C_2$ の法線でもあるから，直線 ① 上に点 Q がある。

よって　$-q=p^2q-p^3+\dfrac{1}{p}$

ゆえに　$q=\dfrac{p^3-\frac{1}{p}}{p^2+1}=\dfrac{p^4-1}{p(p^2+1)}=\dfrac{(p^2+1)(p^2-1)}{p(p^2+1)}=p-\dfrac{1}{p}$

$r=\mathrm{PQ}$ であるから

$$r^2=\mathrm{PQ}^2=(p-q)^2+\left(\frac{1}{p}+q\right)^2=\left\{p-\left(p-\frac{1}{p}\right)\right\}^2+\left\{\frac{1}{p}+\left(p-\frac{1}{p}\right)\right\}^2$$

$$=\frac{1}{p^2}+p^2=\left(p-\frac{1}{p}\right)^2+2=q^2+2$$

$r>0$ であるから　$r=\sqrt{q^2+2}$

$\boxed{4}$

$$f'(x)=-e^x+(3-x)e^x=(2-x)e^x$$
$$f''(x)=-e^x+(2-x)e^x=(1-x)e^x$$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | $2e$ | ↗ | $e^2$ | ↘ |

したがって，$f(x)$ は $x=2$ で極大値 $e^2$ をとり，変曲点の座標は $(1,\ 2e)$ である。

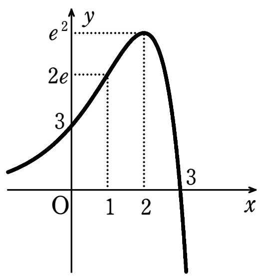
また　$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

$t=-x$ とおくと

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{t\to\infty}\frac{3+t}{e^t}=0$$

よって，$x$ 軸が漸近線である。

したがって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる。




$\boxed{5}$

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x^2+2)-2x(ax^2+bx+c)}{(x^2+2)^2}=\frac{-bx^2+(4a-2c)x+2b}{(x^2+2)^2}$$

$f(x)$ は $x=-2$，$x=1$ で微分可能であるから，$f'(-2)=0$，$f(-2)=\frac{1}{2}$，$f'(1)=0$，$f(1)=2$ であることが必要である。

すなわち　$f'(-2)=\frac{-4b-8a+4c+2b}{36}=\frac{-8a-2b+4c}{36}=0$

$$f'(1)=\frac{-b+4a-2c+2b}{9}=\frac{4a+b-2c}{9}=0$$

よって　$4a+b-2c=0$　……①

$f(-2)=\frac{4a-2b+c}{6}=\frac{1}{2}$ から　$4a-2b+c=3$　……②

$f(1)=\frac{a+b+c}{3}=2$ から　$a+b+c=6$　……③

①，②，③ から　$a=1$，$b=2$，$c=3$

逆に，このとき　$f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x^2+2}$，

$$f'(x)=\frac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2)^2}=\frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$$

$f(x)$ の増減表は右のようになり，条件を満たす。

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $\frac{1}{2}$ | ↗ | $2$ | ↘ |

以上から　$a=1$，$b=2$，$c=3$

$\boxed{6}$ (1)　$f(x)=e^{-x}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-x}(\sin x-\cos x)$

よって　$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-e^{-x})(\sin x-\cos x)+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-x}(\cos x+\sin x)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-x}\cdot 2\cos x=\sqrt{2}\,e^{-x}\cos x$$

別解　$f'(x)=(-e^{-x})\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+e^{-x}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=e^{-x}\left\{-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left\{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{4}\pi\right\}=\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

よって　$f'(x)=\sqrt{2}\,e^{-x}\cos x$

(2)　(1) より，$f'(x)=0$ のとき　$\cos x=0$

$2(k-1)\pi<x<(2k-1)\pi$ のとき，これを満たすのは　$x=2(k-1)\pi+\frac{\pi}{2}=\left(2k-\frac{3}{2}\right)\pi$

$2(k-1)$ は偶数，$2k-1$ は奇数であることに注意すると，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

| $x$ | $2(k-1)\pi$ | $\cdots$ | $\left(2k-\frac{3}{2}\right)\pi$ | $\cdots$ | $(2k-1)\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | 極大 | ↘ | |

したがって，$f(x)$ は $x=\left(2k-\frac{3}{2}\right)\pi$ で，極大値 $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\left(2k-\frac{3}{2}\right)\pi}$ をとる。

(3)　(1) より，$f'(x)=0$ のとき　$\cos x=0$

$(2k-1)\pi<x<2k\pi$ のとき，これを満たすのは　$x=(2k-1)\pi+\frac{\pi}{2}=\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi$

$2k-1$ が奇数，$2k$ が偶数であることに注意すると，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

| $x$ | $(2k-1)\pi$ | $\cdots$ | $\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi$ | $\cdots$ | $2k\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | 極小 | ↗ | |

したがって，$f(x)$ は $x=\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi$ で，極小値 $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi}$ をとる。

(4)　[1]　$n=2k-1$ のとき

(2) より，$2(k-1)\pi<x<(2k-1)\pi$ の範囲における関数 $f(x)$ の極値は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\left(2k-\frac{3}{2}\right)\pi}$$

$2k=n+1$ より　$a_n=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}e^{-n\pi}$

[2]　$n=2k$ のとき

(3) より，$(2k-1)\pi<x<2k\pi$ の範囲における関数 $f(x)$ の極値は　$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi}$

$n=2k$ より　　$a_n=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}=-\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}e^{-n\pi}$

[1]，[2] より

$$a_n=(-1)^{n-1}\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}e^{-n\pi}=(-1)^{n-1}\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}e^{-\pi(n-1)}\cdot e^{-\pi}=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}(-e^{-\pi})^{n-1}$$

したがって　　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}(-e^{-\pi})^{n-1}$

$-1<-e^{-\pi}<0$ であるからこの無限等比級数は収束し，その和は

$$\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1-(-e^{-\pi})}=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}(1+e^{-\pi})}=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}(e^{\pi}+1)}$$

7　$f(x)=x^2\sqrt{9-x^2}$ $(-3\leqq x\leqq 3)$ であるから，$-3<x<3$ において

$$f'(x)=2x\sqrt{9-x^2}+x^2\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=\frac{2x(9-x^2)-x^3}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$=\frac{18x-3x^3}{\sqrt{9-x^2}}=-\frac{3x(x^2-6)}{\sqrt{9-x^2}}=-\frac{3x(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})}{\sqrt{9-x^2}}$$

$-3<x<3$ で $f'(x)=0$ とすると　　$x=0$，$\pm\sqrt{6}$

よって，$-3\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

| $x$ | $-3$ | $\cdots$ | $-\sqrt{6}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\sqrt{6}$ | $\cdots$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | 極大 | ↘ | 極小 | ↗ | 極大 | ↘ | $0$ |

ここで　　$f(\sqrt{6})=f(-\sqrt{6})=6\sqrt{3}$，　$f(0)=0$

したがって，$f(x)$ は $x=\pm\sqrt{6}$ で最大値 $6\sqrt{3}$ をとり，

$x=-3$，$0$，$3$ で最小値 $0$ をとる。

8　(1)　$f(\theta+2\pi)=\dfrac{1}{2}\sin 2(\theta+2\pi)+\sin(\theta+2\pi)=\dfrac{1}{2}\sin(2\theta+4\pi)+\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+\sin\theta=f(\theta)$

よって，$f(\theta)$ は $2\pi$ を周期とする周期関数である。

ゆえに，$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ の範囲の増減を考えればよい。

$$f'(\theta)=\cos 2\theta+\cos\theta=(2\cos^2\theta-1)+\cos\theta$$

$$=2\cos^2\theta+\cos\theta-1=(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)$$

$f'(\theta)=0$ とすると　　$\cos\theta=-1$，$\dfrac{1}{2}$

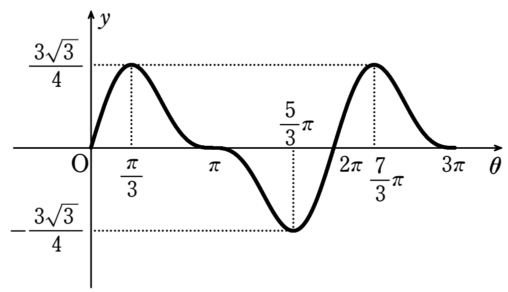
$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ の範囲でこれを解くと　　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\pi$，$\dfrac{5}{3}\pi$

$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ における $f(\theta)$ の増減表は次のようになる。

| $\theta$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\pi$ | $\cdots$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(\theta)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(\theta)$ | $0$ | ↗ | $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ | ↗ | $0$ |

$y=f(\theta)$ $(2\pi\leqq\theta\leqq 3\pi)$ のグラフは，$y=f(\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ のグラフを $\theta$ 軸方向に $2\pi$ だけ平行移動したものである。

したがって，$y=f(\theta)$ のグラフを $0\leqq\theta\leqq 3\pi$ の範囲でかくと，次の図のようになる。

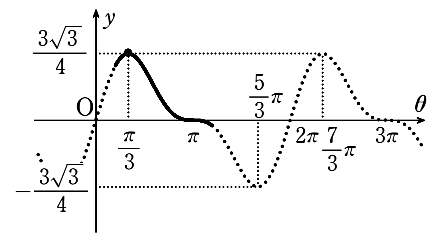



(2)　[1]　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき

$x\leqq\theta\leqq x+\pi$ における $y=f(\theta)$ のグラフは右の図の実線部分のようになる。

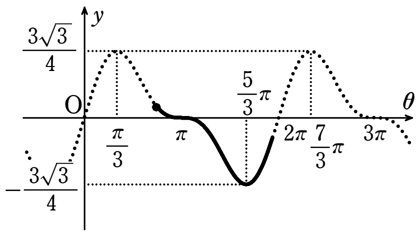
よって

$$g(x)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$



[2] $\frac{\pi}{3}<x\leqq\pi$ のとき

$x+\pi\leqq 2\pi$ であるから，
$x\leqq\theta\leqq x+\pi$ における $y=f(\theta)$ のグラフは右の図の実線部分のようになる。

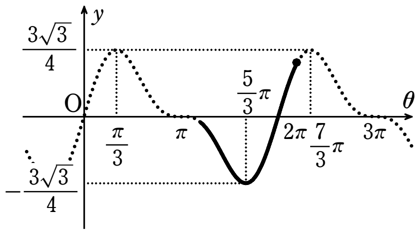



よって

$$g(x)=f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\sin x$$

[3] $\pi<x$ かつ $x+\pi\leqq\frac{7}{3}\pi$ すなわち $\pi<x\leqq\frac{4}{3}\pi$ のとき

$x\leqq\theta\leqq x+\pi$ における $y=f(\theta)$ のグラフは右の図の実線部分のようになる。



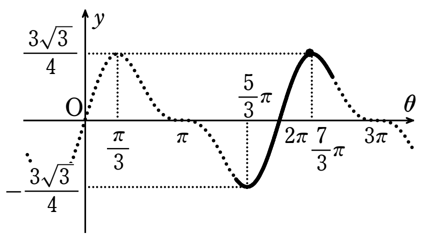

よって　$g(x)=f(x+\pi)$

$$=\frac{1}{2}\sin 2(x+\pi)+\sin(x+\pi)$$

$$=\frac{1}{2}\sin(2x+2\pi)-\sin x=\frac{1}{2}\sin 2x-\sin x$$

[4] $\frac{4}{3}\pi<x\leqq 2\pi$ のとき

$\frac{7}{3}\pi<x+\pi$ であるから，
$x\leqq\theta\leqq x+\pi$ における $y=f(\theta)$ のグラフは右の図の実線部分のようになる。




よって　$g(x)=f\left(\frac{7}{3}\pi\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

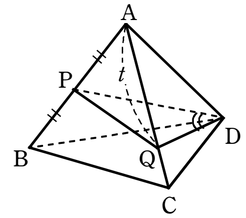
以上から，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$ のとき　$g(x)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\frac{\pi}{3}<x\leqq\pi$ のとき　$g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\sin x$

$\pi<x\leqq\frac{4}{3}\pi$ のとき　$g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\sin x$

$\frac{4}{3}\pi<x\leqq 2\pi$ のとき　$g(x)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

9 AQ$=t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とおく。




△APQ において，余弦定理から

$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{AQ}^2-2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}\cos\angle\mathrm{PAQ}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+t^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot t\cos\frac{\pi}{3}=t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}$$

PQ$>0$ であるから　$\mathrm{PQ}=\sqrt{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}}$

△AQD において，余弦定理から

$$\mathrm{QD}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{AQ}^2-2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AQ}\cos\angle\mathrm{DAQ}$$

$$=1^2+t^2-2\cdot 1\cdot t\cos\frac{\pi}{3}=t^2-t+1$$

QD$>0$ であるから　$\mathrm{QD}=\sqrt{t^2-t+1}$

△ABD は正三角形であり，点 P は辺 AB の中点であるから

$$\mathrm{PD}=\mathrm{AD}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，△PQD において，余弦定理から

$$\cos\angle\mathrm{PDQ}=\frac{\mathrm{PD}^2+\mathrm{QD}^2-\mathrm{PQ}^2}{2\mathrm{PD}\cdot\mathrm{QD}}=\frac{\frac{3}{4}+(t^2-t+1)-\left(t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{3}\sqrt{t^2-t+1}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{3-t}{\sqrt{t^2-t+1}}$$

ここで，$f(t)=\frac{(3-t)^2}{t^2-t+1}$ とおくと

$$f'(t)=\frac{-2(3-t)(t^2-t+1)-(3-t)^2(2t-1)}{(t^2-t+1)^2}$$

$$=\frac{(t-3)\{2(t^2-t+1)-(t-3)(2t-1)\}}{(t^2-t+1)^2}=\frac{(t-3)(5t-1)}{(t^2-t+1)^2}$$

$0\leqq t\leqq 1$ の範囲において，$f'(t)=0$ とすると　$t=\frac{1}{5}$

よって，$0\leqq t\leqq 1$ における $f(t)$ の増減表は右のようになる。

| $t$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{1}{5}$ | $\cdots$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(t)$ | | ↗ | 極大 | ↘ | |

$$f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{\left(\frac{14}{5}\right)^2}{\frac{1}{25}-\frac{1}{5}+1}=\frac{196}{21}=\frac{28}{3}$$ であるから，

$f(t)$ は $t=\frac{1}{5}$ のとき最大値 $\frac{28}{3}$ をとる。

$0\leqq t\leqq 1$ より $\cos\angle\mathrm{PDQ}>0$ であるから，$f(t)$ が最大となるとき $\cos\angle\mathrm{PDQ}$ も最大となる。

その最大値は　$\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{28}{3}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

10 $f(x)=\log x-\frac{1}{x}$ とおくと，$f(x)$ は $x>0$ において連続かつ微分可能であり

$$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x+1}{x^2}$$

よって，$x>0$ のとき，$f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は単調に増加する。

ここで　$f(1)=-1<0$

また，$\log 2>\frac{1}{2}$ から　$f(2)=\log 2-\frac{1}{2}>0$

したがって，中間値の定理により，方程式 $f(x)=0$ すなわち $\log x=\frac{1}{x}$ は，$x>0$ において，ただ 1 つの解をもつ。

# 接線と法線～不等式への応用までの答え

**11** (1) $f'(x)=\dfrac{2(x^2+2)-(2x+1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\dfrac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2)^2}=-\dfrac{2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$

(2) $f'(x)=0$ とすると　　$x=-2,\ 1$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ |

よって，$f(x)$ は

$x=1$ のとき極大値 $1$,

$x=-2$ のとき極小値 $-\dfrac{1}{2}$　をとる。

(3) 方程式を変形すると　　$a(\sin^2 t+2)=2\sin t+1$

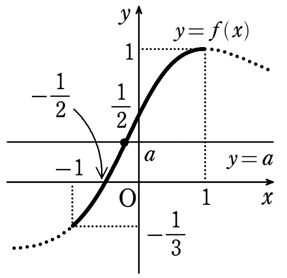
$\sin^2 t+2>0$ から　　$a=\dfrac{2\sin t+1}{\sin^2 t+2}$

$\sin t=x$ とおくと　　$a=\dfrac{2x+1}{x^2+2}$　……①

$-1\leqq\sin t\leqq 1$ であるから，$x$ の方程式①が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で実数解をもつような $a$ の値の範囲を求めればよい。

すなわち，$-1\leqq x\leqq 1$ において，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ が共有点をもつような $a$ の値の範囲を求めればよい。

(2) から，$-1\leqq x\leqq 1$ における $y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。




よって，求める $a$ の値の範囲は

$$-\frac{1}{3}\leqq a\leqq 1$$

**12** (1) $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^3}$ から　　$f'(x)=\dfrac{2(x-1)\cdot x^3-(x-1)^2\cdot 3x^2}{x^6}=\dfrac{-(x-1)(x-3)}{x^4}$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ／ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ／ | $\searrow$ | 極小 $0$ | $\nearrow$ | 極大 $\frac{4}{27}$ | $\searrow$ |

したがって，

$f(x)$ は $x=3$ で極大値 $\dfrac{4}{27}$ をとり，

$x=1$ で極小値 $0$ をとる。

(2) 曲線 $y=f(x)$ $(x>0)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-\frac{(t-1)^2}{t^3}=\frac{-(t-1)(t-3)}{t^4}(x-t)$$

すなわち　　$y=-\dfrac{(t-1)(t-3)}{t^4}x+\dfrac{2(t^2-3t+2)}{t^3}$

これが点 $\mathrm{P}(0,\ p)$ を通るとき　　$p=\dfrac{2(t^2-3t+2)}{t^3}$

ここで，$g(t)=\dfrac{2(t^2-3t+2)}{t^3}$ とすると

$$g'(t)=\frac{2(2t-3)\cdot t^3-2(t^2-3t+2)\cdot 3t^2}{t^6}=\frac{-2(t^2-6t+6)}{t^4}$$

$g'(t)=0$ とすると　　$t=3\pm\sqrt{3}$

$t>0$ における $g(t)$ の増減表は右のようになる。

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $3-\sqrt{3}$ | $\cdots$ | $3+\sqrt{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | ／ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g(t)$ | ／ | $\searrow$ | 極小 | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ |

ここで，$g(t)$ の分母 $t^3$ を $t^2-6t+6$ で割ったときの商は $t+6$，余りは $30t-36$ である。

また，$g(t)$ の分子 $2t^2-6t+4$ を $t^2-6t+6$ で割ったときの商は $2$，余りは $6t-8$ である。

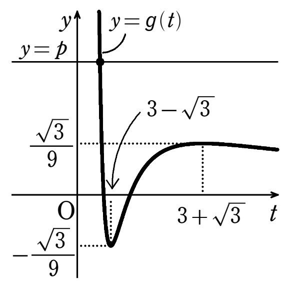
よって　　$g(t)=\dfrac{(t^2-6t+6)\cdot 2+6t-8}{(t^2-6t+6)(t+6)+30t-36}$

ゆえに　　$g(3\pm\sqrt{3})=\dfrac{0+6(3\pm\sqrt{3})-8}{0+30(3\pm\sqrt{3})-36}=\dfrac{2(5\pm 3\sqrt{3})}{6(9\pm 5\sqrt{3})}$

$$=\frac{(5\pm 3\sqrt{3})(9\mp 5\sqrt{3})}{3\cdot 6}=\frac{\pm 2\sqrt{3}}{18}=\pm\frac{\sqrt{3}}{9}$$　(すべて複号同順)

また　　$\displaystyle\lim_{t\to+0}g(t)=\infty$,　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)=\lim_{t\to\infty}2\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{t^2}+\frac{2}{t^3}\right)=0$

よって，$y=g(t)$ のグラフは，右の図のようになる。




$p=g(t)$ を満たす正の実数 $t$ の個数が，接線の本数と一致するから，求める接線の本数は

$p<-\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ のとき　0 本

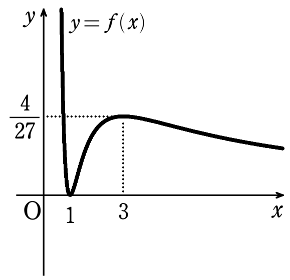
$p=-\dfrac{\sqrt{3}}{9}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{9}<p$ のとき　1 本

$-\dfrac{\sqrt{3}}{9}<p\leqq 0$，$p=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ のとき　2 本

$0<p<\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ のとき　3 本

参考　曲線 $y=f(x)$ $(x>0)$ の概形は，右の図のようになり，曲線 $y=f(x)$ と異なる 2 点で接する直線は存在しない。

したがって，$p=g(t)$ を満たす正の実数 $t$ の個数が，接線の本数と一致する。



# 接線と法線〜不等式への応用までの答え

**13** $f(x)=x^3e^{-x}-27e^{-3}$ とおくと　$f'(x)=3x^2e^{-x}+x^3(-e^{-x})=x^2(3-x)e^{-x}$

$x\geqq3$ のとき $f'(x)\leqq0$ であるから，$f(x)$ は $x\geqq3$ で単調に減少する。

また　$f(3)=27e^{-3}-27e^{-3}=0$

よって，$x\geqq3$ のとき　$f(x)\leqq f(3)=0$

したがって　$x^3e^{-x}\leqq27e^{-3}$

ゆえに，$x\geqq3$ のとき　$0<x^2e^{-x}\leqq\dfrac{27e^{-3}}{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{27e^{-3}}{x}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$

**14** (1)　$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-(\log x)\cdot1}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x)=0$ とすると　$\log x=1$　　よって　$x=e$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | / | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | / | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$ | $\searrow$ |

ゆえに，$f(x)$ は $x=e$ で最大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる。

(2)　自然数 $n$ が $n^{n+1}<(n+1)^n$ …… ① を満たすとき，両辺の自然対数をとると

$(n+1)\log n<n\log(n+1)$

両辺を $n(n+1)\ (>0)$ で割ると　$\dfrac{\log n}{n}<\dfrac{\log(n+1)}{n+1}$　…… ②

すなわち，① は $f(n)<f(n+1)$ と同値である。

(1) の増減表から，$f(x)$ は $0<x<e$ で増加し，$x>e$ で減少する。

よって，$n>e$ のとき，不等式 ② は成り立たない。

したがって，$0<n\leqq e$ であることが必要である。

$n$ は自然数であり，$e=2.7\cdots\cdots$ であるから　$n=1,\ 2$

[1]　$n=1$ のとき

(① の左辺)$=1^2=1$，　(① の右辺)$=2^1=2$

よって，不等式 ① は成り立つ。

[2]　$n=2$ のとき

(① の左辺)$=2^3=8$，　(① の右辺)$=3^2=9$

よって，不等式 ① は成り立つ。

[1]，[2] から，求める自然数 $n$ は　$n=1,\ 2$

参考　[1] は，次のように考えてもよい。

$n=1$ のとき，$n+1=2$ であり　$0<n<n+1<e$

$f(x)$ は $0<x<e$ において増加するから　$f(n)<f(n+1)$

よって，② すなわち ① が成り立つ。

なお，[2] の $n=2$ のときは，$0<n<e<n+1$ であるから，この方法は使えない。

解答のように，$n=2$ を代入して調べるのがよい。

**15** $x=0$ のとき，与えられた不等式はすべての実数 $a$ について成り立つ。

$x\neq0$ とする。

$\cos x\leqq1-ax^2$ から　$a\leqq\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

$f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ とおく。

$f(x)$ は偶関数であるから，$0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減を考える。

$$f'(x)=\frac{x^2\sin x-2x(1-\cos x)}{x^4}=\frac{x\sin x+2\cos x-2}{x^3}$$

$g(x)=x\sin x+2\cos x-2$ とおくと

$g'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x=-\sin x+x\cos x$

$g''(x)=-\cos x+\cos x-x\sin x=-x\sin x$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$g''(x)\leqq0$

よって，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において $g'(x)$ は単調に減少する。

また，$g'(0)=0$ であるから　$g'(x)\leqq0$

ゆえに，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において $g(x)$ は単調に減少する。

また，$g(0)=0$ であるから　$g(x)\leqq0$

したがって，$0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において $f'(x)<0$ であるから，$f(x)$ は単調に減少する。

よって，$0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

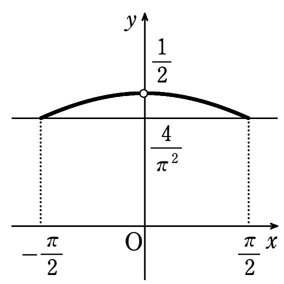
| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | / | $-$ | |
| $f(x)$ | / | $\searrow$ | |

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{\sin^2x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$

であるから　$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=\frac{1}{2}$

また　$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4}{\pi^2}$

ゆえに，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$x\neq0$ における $y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。




定義域内のすべての $x$ に対して $a\leqq f(x)$ が成り立つような $a$ の最大値は　$a=\dfrac{4}{\pi^2}$

したがって，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において $\cos x\leqq1-ax^2$ が成り立つような $a$ の最大値は　$a=\dfrac{4}{\pi^2}$