接線と法線

1 xy 平面において，原点から曲線 $y=x+e^x$ に接線を引くとき，接点の座標を求めよ。

2 曲線 $y=\sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$ を C とし，点 $(0,\ 1)$ を P_1，点 $(1,\ 1)$ を T_1 とおく。T_1 における C の接線が y 軸と交わる点を P_2 とおき，P_2 を通り x 軸に平行な直線が C と交わる点を T_2 とおく。T_2 における C の接線が y 軸と交わる点を P_3 とおき，P_3 を通り x 軸に平行な直線が C と交わる点を T_3 とおく。以下，この操作を続け，y 軸上に点列 P_1，P_2，P_3，……，P_n，…… をとり，C 上に点列 T_1，T_2，T_3，……，T_n，…… をとる。

(1) T_2 と T_3 の座標を求めよ。

(2) P_n と T_n の座標を n を用いて表せ。

(3) $\triangle \mathrm{T}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を S_n とするとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ。

3 双曲線 C_1：$y=\dfrac{1}{x}$ について

(1) 点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ における C_1 の法線の方程式を求めよ。ただし，$p \neq 0$ とする。

(2) 点 $\mathrm{Q}\,(q,\ -q)$ を中心とする円 C_2 と C_1 が，ちょうど 2 個の共有点をもつとき，円 C_2 の半径 r を q の式で表せ。

関数の値の変化

4 関数 $f(x)=(3-x)e^{x}$ について，関数の増減，極値，グラフの凹凸を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^{x}}=0$ は証明なしで用いてよい。

5 関数 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+2}$ （a，b，c は定数）が $x=-2$ で極小値 $\dfrac{1}{2}$，$x=1$ で極大値 2 をもつ。このとき a，b，c の値を求めよ。

6 e を自然対数の底とし，$f(x)=e^{-x}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ とする。

(1) 導関数 $f'(x)$ は $f'(x)=\sqrt{2}\,e^{-x}\cos x$ を満たすことを示せ。

(2) k を自然数とする。$2(k-1)\pi<x<(2k-1)\pi$ の範囲で，関数 $f(x)$ の増減を調べ，極値を k を用いて表せ。

(3) k を自然数とする。$(2k-1)\pi<x<2k\pi$ の範囲で，関数 $f(x)$ の増減を調べ，極値を k を用いて表せ。

(4) 自然数 n に対して，$(n-1)\pi<x<n\pi$ の範囲における関数 $f(x)$ の極値を a_n とする。無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の和を求めよ。

7 関数 $f(x)=x^2\sqrt{9-x^2}$ $(-3\leqq x\leqq 3)$ の最大値と最小値を求めよ。

8 関数 $f(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+\sin\theta$ の区間 $[x,\ x+\pi]$ における最大値を $g(x)$ とする。ただし，x は $0\leqq x\leqq 2\pi$ を満たす実数とする。

(1) $y=f(\theta)$ のグラフを $0\leqq\theta\leqq 3\pi$ の範囲でかけ。ただし，グラフの凹凸は調べなくてよい。

(2) $g(x)$ を x を用いて表せ。

9 1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD において，P を辺 AB の中点とし，点 Q が辺 AC 上を動くとする。このとき，$\cos\angle\mathrm{PDQ}$ の最大値を求めよ。

10 方程式 $\log x=\dfrac{1}{x}$ は，$x>0$ において，ただ1つの解をもつことを示せ。ただし，$\log 2>\dfrac{1}{2}$ を用いてもよい。

11 関数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+2}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を微分せよ。

(2) $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(3) t の方程式 $a\sin^2 t-2\sin t+2a-1=0$ が実数解をもつような実数 a の値の範囲を求めよ。

12 関数 $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^3}$ $(x>0)$ を考える。

(1) 関数 $f(x)$ の極大値および極小値を求めよ。

(2) y 軸上に点 $\mathrm{P}(0,\ p)$ をとる。p の値によって，$\mathrm{P}(0,\ p)$ から曲線 $y=f(x)$ に何本の接線が引けるかを調べよ。

不等式への応用

13 $x \geqq 3$ のとき，不等式 $x^3e^{-x} \leqq 27e^{-3}$ が成り立つことを示せ。さらに，極限値 $\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x}$ を求めよ。

14 (1) 関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ を考える。$f(x)$ の増減を調べ，最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2) $n^{n+1}<(n+1)^n$ を満たす自然数 n をすべて求めよ。

15 次の条件 $(*)$ を満たすような実数 a で最大のものを求めよ。

$(*)$ $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲のすべての x に対して

$$\cos x \leqq 1-ax^2$$

が成り立つ。