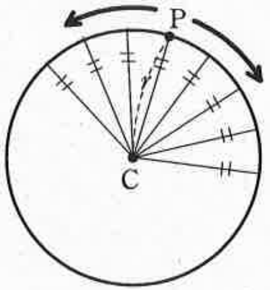
## 第3節　軌跡と領域

「点Pが動いた跡」
「一定の条件を満たす点の集合」

### 8　軌跡と方程式

(目標) 与えられた条件から方程式を導き，図形を求める

平面上に点Cをとる。点Pが条件 $\mathrm{CP}=r$ を満たしながら動くとき，Pが描く図形は，中心がC，半径が $r$ の円である。




一般に，与えられた条件を満たす点が動いてできる図形を，その条件を満たす点の **軌跡** という。

座標を用いて，与えられた条件を満たす点の軌跡を求めてみよう。

**例14**　2点A $(-1,\ 0)$，B $(1,\ 0)$ からの距離の2乗の和が10である点Pの軌跡

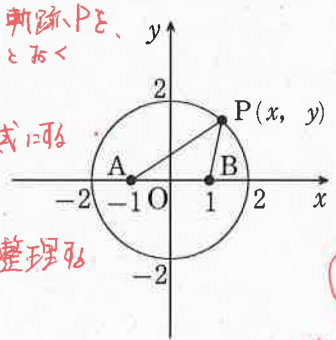
① まず，求めたい軌跡Pを $(x, y)$ とおく

点Pの座標を $(x,\ y)$ とする。

Pの満たす条件は

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=10$$

② 条件を数式にする




$\mathrm{AP}^2=(x+1)^2+y^2$,

$\mathrm{BP}^2=(x-1)^2+y^2$ を代入すると

整理する

$\{(x+1)^2+y^2\}+\{(x-1)^2+y^2\}=10$

整理すると　　$x^2+y^2=2^2$

円 or 直線 or 放物線

ゆえに，条件を満たす点Pは，円 $x^2+y^2=2^2$ 上にある。

③ 方程式から図形を求める

逆に，円 $x^2+y^2=2^2$ 上の任意の点P $(x,\ y)$ は，上の計算を逆にたどって，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=10$ を満たすことがわかる。

よって，求める軌跡は，中心が原点，半径が2の円である。 図

④ 求めた図形のすべての点が条件を満たすか check

今回はすべて同値変形なので，逆にたどれば条件を満たすことが分かる

一方で，満たさない点が存在することもある

その場合はその点を除く。P113.6

**練習36**　2点A $(1,\ 0)$，B $(3,\ 2)$ から等距離にある点Pの軌跡を求めよ。

方程式の同値変形

① 両辺に同じ数(式)を加える(ひく)

② 両辺に0でない数をかける(わる)

＊両辺2乗するは同値変形でない

与えられた条件を満たす点Pの軌跡が図形 $F$ であることを示すには，次の2つのことを証明する。

1　**その条件を満たす任意の点Pは，図形 $F$ 上にある。**

2　**図形 $F$ 上の任意の点Pは，その条件を満たす。**

**【補足】** 2が明らかな場合，その証明を省略することがある。

**例題9**　2点A $(0,\ 0)$，B $(3,\ 0)$ からの距離の比が $2:1$ である点Pの軌跡を求めよ。

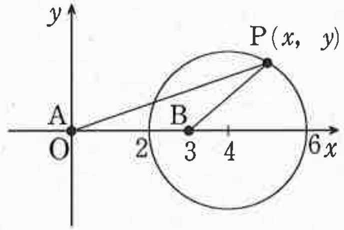
**解**　点Pの座標を $(x,\ y)$ とする。

Pの満たす条件は

$$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=2:1$$

これより　　$\mathrm{AP}=2\mathrm{BP}$

すなわち　　$\mathrm{AP}^2=4\mathrm{BP}^2$




$\mathrm{AP}^2=x^2+y^2$,

$\mathrm{BP}^2=(x-3)^2+y^2$ を代入すると

$$x^2+y^2=4\{(x-3)^2+y^2\}$$

整理すると　　$x^2+y^2-8x+12=0$

すなわち　　$(x-4)^2+y^2=2^2$　……①

ゆえに，条件を満たす点Pは，円①上にある。

逆に，円①上の任意の点P $(x,\ y)$ は，条件を満たす。

よって，求める軌跡は，中心が点 $(4,\ 0)$，半径が2の円である。

**【補足】** $m$，$n$ は正の数とする。一般に，2点A，Bからの距離の比が $m:n$ である点の軌跡は，$m\neq n$ ならば，線分ABを $m:n$ に内分する点と外分する点を直径の両端とする円である。この円を **アポロニウスの円** という。

$m=n$ ならば，軌跡は，線分ABの垂直二等分線である。

**練習37**　2点A $(-1,\ 0)$，B $(2,\ 0)$ からの距離の比が $1:2$ である点Pの軌跡を求めよ。

座標を用いて軌跡を求める手順をまとめると，次のようになる。

**軌跡を求める手順**

1　求める軌跡上の任意の点の座標を $(x,\ y)$ などで表し，与えられた条件を座標の間の関係式で表す。
2　軌跡の方程式を導き，その方程式の表す図形を求める。
3　その図形上の任意の点が条件を満たしていることを確かめる。

「逆に図形上の点P$(x, y)$は条件を満たす」という一言があればよい。

**応用例題 7**

点 Q が円 $x^2+y^2=16$ 上を動くとき，点 A$(6,\ 0)$ と点 Q を結ぶ線分 AQ の中点 P の軌跡を求めよ。 求める点の軌跡 → P　動く点 → Q の区別をつける！

〈解説〉点 P，Q の座標を，それぞれ $(x,\ y)$，$(s,\ t)$ とし，Q の満たす条件 $s^2+t^2=16$ を利用して，$x$，$y$ についての関係式を導く。

**解**　点 P，Q の座標を，それぞれ $(x,\ y)$，$(s,\ t)$ とする。 →求める点　動く点

Q は円 $x^2+y^2=16$ 上にあるから

$$s^2+t^2=16 \quad \cdots\cdots ①$$

P は線分 AQ の中点であるから

$$x=\frac{6+s}{2},\quad y=\frac{0+t}{2}$$

ゆえに　$s=2x-6,\ t=2y$

これを ① に代入すると

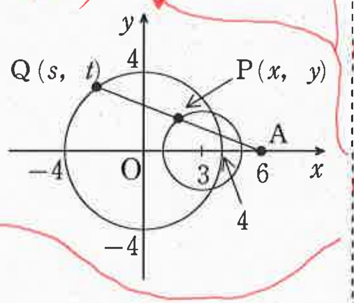
$$(2x-6)^2+(2y)^2=16$$

すなわち　$(x-3)^2+y^2=2^2 \quad \cdots\cdots ②$

ゆえに，条件を満たす点 P は，円 ② 上にある。

逆に，円 ② 上の任意の点 P$(x,\ y)$ は，条件を満たす。

よって，求める軌跡は，中心が点 $(3,\ 0)$，半径が 2 の円である。

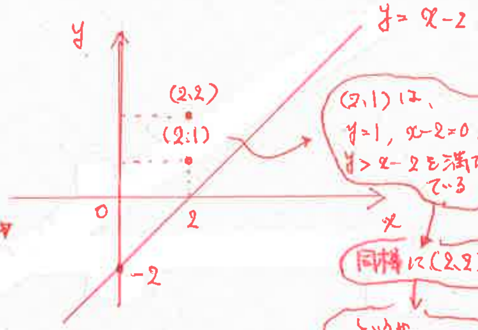



求め方
①求める軌跡上の点Pの座標$(x, y)$とおく。
②他に動く点があれば，その座標を$(s, t)$とおく。
③条件に当てはめ，($s, t$を消去し)，方程式($x, y$だけの式)を求める
④求めた図形上の点が条件を満たすか check

**練習 38**　点 Q が放物線 $y=x^2$ 上を動くとき，点 A$(0,\ 3)$ と点 Q を結ぶ線分 AQ を 2：1 に内分する点 P の軌跡を求めよ。

## 9　不等式の表す領域

具体例で．．．




(2,1)は，$y=1$，$x-2=0$ より $y>x-2$を満たしている

同様に(2,2)も

というか，$y=x-2$より上にある点はすべて満たしている

### A　直線を境界線とする領域

座標平面上で，$x$，$y$ の 1 次方程式

$$y=x-2 \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合は直線を表す。

ここでは，不等式

$$y>x-2 \quad \cdots\cdots ②$$

を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合がどのような図形を表すか調べてみよう。

不等式 ② を満たす任意の点 P$(x_1,\ y_1)$ をとると

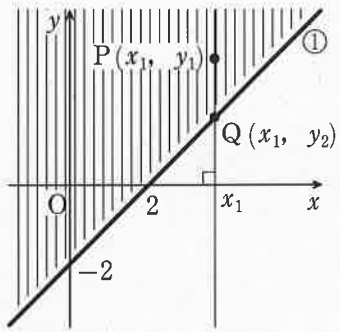
$$y_1>x_1-2 \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ。

また，P を通り，$x$ 軸に垂直な直線と直線 ① の交点を Q$(x_1,\ y_2)$ とすると

$$y_2=x_1-2 \quad \cdots\cdots ④$$

である。




③，④ から　$y_1>y_2$

ゆえに，点 P は直線 ① より上側にある。

逆に，点 P$(x_1,\ y_1)$ が直線 ① より上側にあると，$(x_1,\ y_1)$ は ② を満たす。

したがって，不等式 ② を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合は，直線 ① より上側の部分である。

同様に，不等式 $y<x-2$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合は，直線 ① より下側の部分である。

一般に，変数 $x$，$y$ についての不等式を満たす座標平面上の点 $(x,\ y)$ 全体の集合を，その不等式の表す **領域** という。

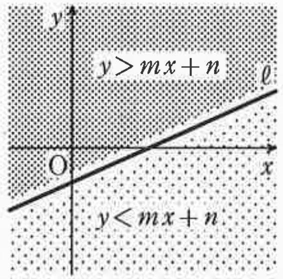
直線で分けられる領域について，一般に次のことが成り立つ。

**直線と領域**

直線 $y=mx+n$ を $\ell$ とする。

1　不等式 $y>mx+n$ の表す領域は
直線 $\ell$ の**上側の部分**

2　不等式 $y<mx+n$ の表す領域は
直線 $\ell$ の**下側の部分**




**【注意】**　$y\geqq mx+n$ や $y\leqq mx+n$ の表す領域は，直線 $y=mx+n$ を含む。

**例 15**　**不等式 $3x-2y-2\leqq 0$ の表す領域**

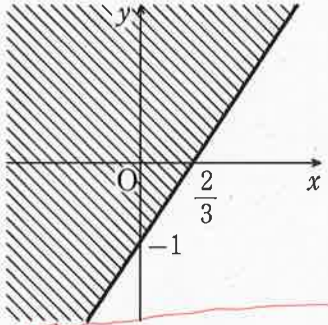
不等式を変形すると

$$y\geqq \frac{3}{2}x-1$$

したがって，求める領域は直線 $y=\frac{3}{2}x-1$ およびその上側の部分である。

すなわち，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。 図

図だけでは、判断できないので
必ず、つける。(ただし、境界線は含まない)




**練習 39**　次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$y>2x-3$　　(2)　$y\leqq -x+1$

(3)　$3x+y-2>0$　　(4)　$3x-4y\geqq -12$

**問 5**　次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$y\leqq 2$　　(2)　$x>1$

**練習 40**　次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$y>-1$　　(2)　$y+3\leqq 0$　　(3)　$x\leqq 2$

## B　円を境界線とする領域

不等式 $(x-1)^2+(y-3)^2<2^2$　…… ①

の表す領域について考えてみよう。

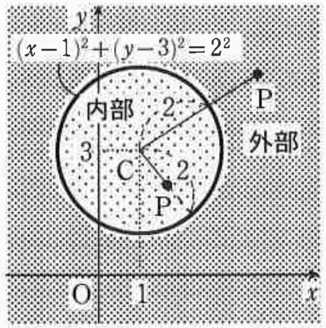
点 C(1, 3) と点 P$(x,\ y)$ の距離 CP は

$$\mathrm{CP}=\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$$

であるから，不等式 ① は

$$\mathrm{CP}^2<2^2 \quad すなわち \quad \mathrm{CP}<2$$

が成り立つことを示している。よって，




不等式 ① の表す領域は，円 $(x-1)^2+(y-3)^2=2^2$ の内部である。

また，不等式 $(x-1)^2+(y-3)^2>2^2$ の表す領域は，同様に考えると，円 $(x-1)^2+(y-3)^2=2^2$ の外部であることがわかる。

(1.3)からちょうど2の距離の点が「円」
(1.3)からの距離が2未満「円の内部」
(1.3)からの距離が2超過「円の外部」

ここでいう円は円周のこと。
数学では「円」=「円周」

円まで届かない

円を超えてる

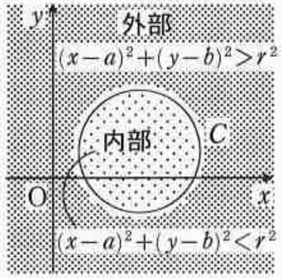
円で分けられる領域について，一般に次のことが成り立つ。

**円と領域**

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を $C$ とする。

1　不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す
領域は**円 $C$ の内部**

2　不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ の表す
領域は**円 $C$ の外部**




**【注意】** $(x-a)^2+(y-b)^2\leqq r^2$ や $(x-a)^2+(y-b)^2\geqq r^2$ の表す領域は，
円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を含む。

**問 6**　不等式 $(x+2)^2+y^2\leqq 1$ の表す領域を図示せよ。

**練習 41**　次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$x^2+y^2<1$　　(2)　$x^2+y^2\geqq 3$

(3)　$x^2+(y-3)^2\leqq 4$　　(4)　$(x+1)^2+(y-2)^2>9$

**例題 10**　次の不等式の表す領域を図示せよ。

$$x^2+y^2-2x-4y+1\leqq 0$$

**解**　不等式は

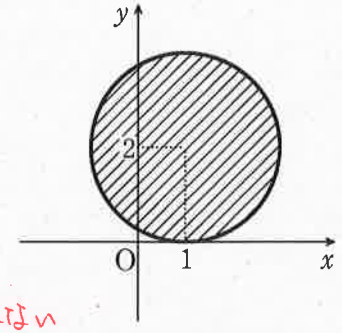
$$(x-1)^2+(y-2)^2\leqq 4$$

と変形できるから，求める領域は，円

$$(x-1)^2+(y-2)^2=4$$

およびその内部である。
すなわち，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

忘れない



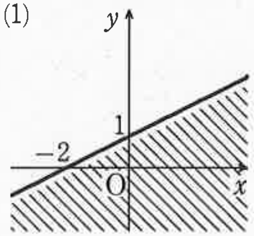

**練習 42**　次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$x^2+y^2-6x-2y+9\geqq 0$　　　(2)　$x^2+y^2+4x-6y+1<0$

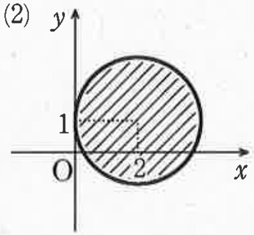
**問 7**　中心が点 $(2,\ -3)$，半径が 5 の円の内部を表す不等式を作れ。ただし，境界線を含まないものとする。

**練習 43**　右の図の斜線部分は，どのような不等式の表す領域か。ただし，境界線を含まないものとする。

(1)




(2)




## C　連立不等式の表す領域

$x$，$y$ についての連立不等式の表す領域は，各不等式を同時に満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合で，各不等式の表す領域の共通部分である。

連立方程式

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+2y=3 \end{cases}$$

$x=1,\ y=1$

2つの方程式を どちらも満たす

連立不等式

$$\begin{cases} x^2+y^2<25 \\ y<3x-5 \end{cases}$$

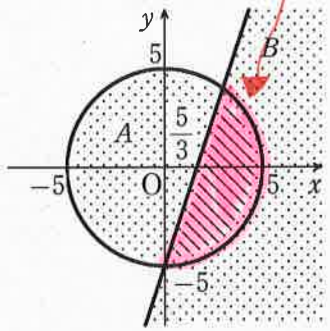
同様に どちらも満たす領域を求める

**例題 11**　次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} x^2+y^2<25 \\ y<3x-5 \end{cases}$$

どちらも満たすのは

**解**　$x^2+y^2<25$ の表す領域を $A$
$y<3x-5$　の表す領域を $B$
とすると，求める領域は $A$，$B$ の共通部分 $A\cap B$ である。
すなわち，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。




**練習 44**　次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$\begin{cases} x+y<3 \\ 2x-y<6 \end{cases}$　　　(2)　$\begin{cases} (x-2)^2+y^2\geqq 1 \\ x+2y\geqq 3 \end{cases}$

**例題 12**　次の不等式の表す領域を図示せよ。

$$(x-y)(x+y-2)<0$$

かけて 負になるということは
$(x-y)(x+y-2)<0$
正　負
負　正　のどちらか

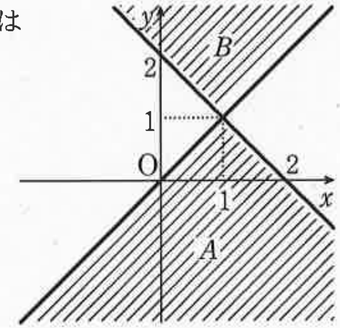
**解**　与えられた不等式が成り立つことは

$$\begin{cases} x-y>0 \\ x+y-2<0 \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

または

$$\begin{cases} x-y<0 \\ x+y-2>0 \end{cases} \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つことと同値である。




よって，求める領域は，① の表す領域 $A$ と ② の表す領域 $B$ の和集合 $A\cup B$ である。すなわち，上の図の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。

**練習 45**　次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$(3x+4y-12)(x-2y+4)>0$　　　　(2)　$(x-1)(y-1)<0$

今回は　2変数 $(x \cdot y)$ の最大値 最小値 問題です
数 I §6 で扱いましたが，この問題は前のときのように 1変数に変換できません　2変数あるので，方程式で解くのは難しいので　図形的に解いていきます。

## D　領域と最大・最小

**応用例題 8**

$x$，$y$ が 4 つの不等式

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2x+3y \leqq 12,\ 2x+y \leqq 8$$

を満たすとき，$x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

まずは これを満たす領域を 図示しましょう

〈解説〉 $x+y=k$ とおくと $y=-x+k$ であり，これは傾きが $-1$，$y$ 切片が $k$ の直線を表す。この直線が与えられた連立不等式の表す領域と共有点をもつような $k$ の値の範囲を調べる。

これが 今回の 求めるkの とり得る値の範囲です

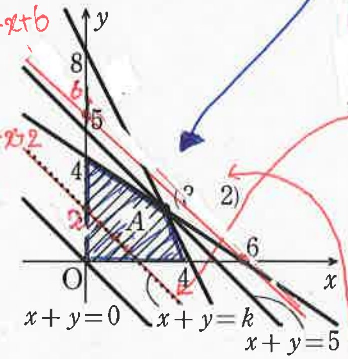
**解**　与えられた連立不等式の表す領域を $A$ とすると，領域 $A$ は 4 点 $(0,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(3,\ 2)$，$(0,\ 4)$ を頂点とする四角形の周および内部である。

$$x+y=k \quad \cdots\cdots ①$$

とおくと，これは傾きが $-1$，$y$ 切片が $k$ の直線を表す。

この直線 ① が領域 $A$ と共有点をもつような $k$ の値の最大値と最小値を求めればよい。

y切片




領域 $A$ においては，直線 ① が点 $(3,\ 2)$ を通るとき $k$ の値は最大になり，原点 O を通るとき $k$ の値は最小になる。

よって，$x+y$ は

$x=3$，$y=2$ のとき，最大値 5 をとり，

$x=0$，$y=0$ のとき，最小値 0 をとる。

では，問題です。
$x+y=2$ となるでしょうか？
正解はなります。
なぜって $(1,1)$ や $(2,0)$ が領域内に存在しているから
他にもいっぱいあります
$y=-x+2$ 上の点は全部OKです。
次，$x+y=6$ となるでしょうか？
正解はなりません
だって，$y=-x+6$ 上の点が領域内にないからです。
このことを踏まえて，

**練習 46**　$x$，$y$ が 4 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$3x+y \leqq 9$，$x+2y \leqq 8$ を満たすとき，$2x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

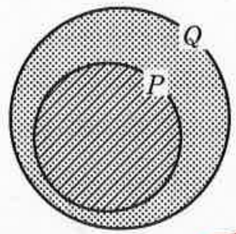
## E　領域を利用した証明法

一般に，2 つの条件 $p$，$q$ について

条件 $p$ を満たすもの全体の集合を $P$

条件 $q$ を満たすもの全体の集合を $Q$

とすると，次のことが成り立つ。




**「$p \Longrightarrow q$ が真である」$\Longleftrightarrow$「$P \subset Q$ が成り立つ」**

カラス ⇒ 鳥 が真
⇔
鳥
カラス

条件 $p$，$q$ が $x$，$y$ の不等式で表される場合に，上のことを用いて $p \Longrightarrow q$ が真であることを証明してみよう。

**応用例題 9**

$x$，$y$ は実数とする。次のことを証明せよ。

$$x^2+y^2<1 \quad ならば \quad x^2+y^2+2y-3<0$$

つまり $x^2+y^2<1$ を満たす すべての点が $x^2+y^2+2y-3<0$ を満たせばよい

〈解説〉 不等式 $x^2+y^2<1$，$x^2+y^2+2y-3<0$ の表す領域を，それぞれ $P$，$Q$ として，$P \subset Q$ であることを示す。

**証明**　不等式

$$x^2+y^2<1$$

の表す領域を $P$，不等式

$$x^2+y^2+2y-3<0$$

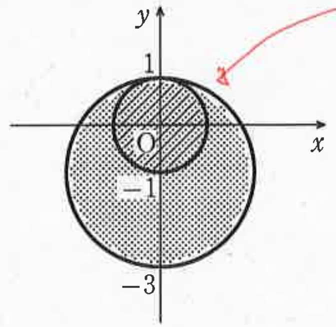
の表す領域を $Q$ とする。$P$ は円

$$x^2+y^2=1$$

の内部，$Q$ は円

$$x^2+(y+1)^2=4$$

の内部であり，図から $P \subset Q$ である。




よって，$x^2+y^2<1$ ならば $x^2+y^2+2y-3<0$ である。　終

**練習 47**　$x$，$y$ は実数とする。次のことを証明せよ。

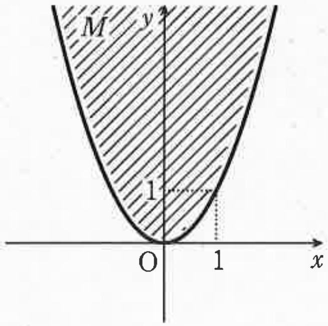
$$x^2+y^2<1 \quad ならば \quad x+y<\sqrt{2}$$

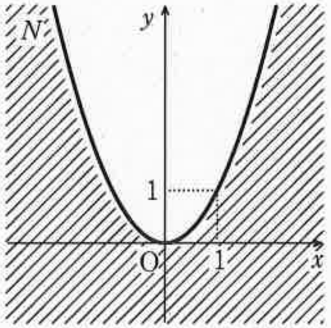
## 研究　放物線を境界線とする領域

104 ページでは，境界線が直線の場合の領域について学んだ。それと同様に考えて，曲線 $y=f(x)$ について，一般に次のことが成り立つ。

**不等式 $y>f(x)$ の表す領域は，曲線 $y=f(x)$ の上側の部分である。**
**不等式 $y<f(x)$ の表す領域は，曲線 $y=f(x)$ の下側の部分である。**

境界線が放物線の場合，例えば，不等式 $y>x^2$ の表す領域 $M$ は放物線 $y=x^2$ の上側の部分であり，不等式 $y<x^2$ の表す領域 $N$ は放物線 $y=x^2$ の下側の部分である。よって，領域 $M$，$N$ は，それぞれ下の図の斜線部分である。いずれも境界線を含まない。

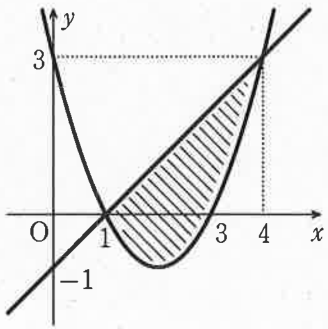



また，連立不等式

$$\begin{cases} y>x^2-4x+3 & \cdots\cdots ① \\ y<x-1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

の表す領域は，不等式 ① の表す領域と不等式 ② の表す領域の共通部分である。よって，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。




## 問　題

16. 2 点 A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 0)$ からの距離の 2 乗の差 $\mathrm{AP}^2-\mathrm{BP}^2$ が 8 である点 P の軌跡を求めよ。

→ p.101

17. 点 $(2,\ 1)$ に関して点 Q$(a,\ b)$ と対称な点を P とする。
 (1) P の座標を $a$，$b$ で表せ。
 (2) Q が直線 $2x-y+1=0$ 上を動くとき，点 P の軌跡を求めよ。

→ p.103

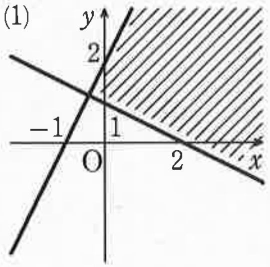
18. 点 Q が円 $x^2+y^2=9$ 上を動くとき，2 点 A$(6,\ 1)$，B$(-3,\ 5)$ と Q を頂点とする △ABQ の重心 P の軌跡を求めよ。

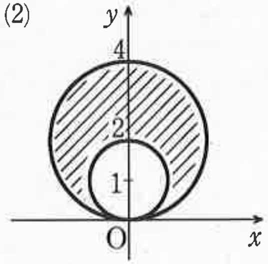
→ p.103

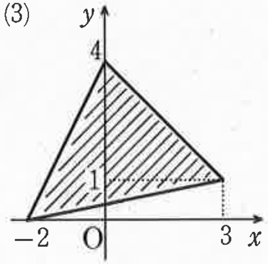
19. 次の不等式の表す領域を図示せよ。
 (1) $\begin{cases} 5x-2y-7<0 \\ (x-y+1)(2x+y-1)>0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x-3y+2\geqq 0 \\ (x+y-2)(x-y+2)\leqq 0 \end{cases}$
 (3) $1<x^2+y^2<4$　研究 (4) $y\geqq x^2-2x$

→ p.105 ～ 108，111

20. 次の図の斜線部分は，どのような不等式の表す領域か。ただし，境界線を含まないものとする。

(1)



(2)



(3)



→ p.105 ～ 108

21. $x$，$y$ が 3 つの不等式 $2x+y\geqq 0$，$x+2y\leqq 6$，$4x-y\leqq 6$ を満たすとき，$x-y$ の最大値，最小値を求めよ。

→ p.109