理系　数学演習２　クリアー　　その５，６　解説

$\boxed{28}$ [三訂版クリアーＩⅡＡＢ受 Step Up97]

(1)　数字 1，2，3 をそれぞれ x 個，y 個，$(5-x-y)$ 個 とすると，各位の数の和は

$$x+2y+3(5-x-y)=-(2x+y)+15$$

3 の倍数になるのは，各位の数の和が 3 の倍数のときである。

よって　$(x,\ y)=(0,\ 0),\ (0,\ 3),\ (1,\ 1),\ (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (3,\ 0),\ (4,\ 1)$

したがって，3 の倍数は

$$1+\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{1!1!3!}+\frac{5!}{1!4!}+\frac{5!}{2!2!1!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{4!1!}$$

$$=1+10+20+5+30+10+5=81\ (\text{個})$$

(2)　(1) で求めた $(x,\ y)$ のうち各位の数の和が 9 の倍数となるものは

$$(x,\ y)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (3,\ 0)$$

よって，9 の倍数は　$\dfrac{5!}{1!4!}+\dfrac{5!}{2!2!1!}+\dfrac{5!}{3!2!}=45\ (\text{個})$

(3)　[1]　1 種類の数字で表されるとき

11111，22222，33333 の　3 個

[2]　2 種類の数字で表されるとき

2 種類の数字の選び方は　${}_3C_2=3$ (通り)

その 2 種類のみで表される整数は　$2^5-2=30$ (個)

よって　$3\times30=90$ (個)

[1]，[2] から　$3^5-(3+90)=150$ (個)

$\boxed{29}$ [三訂版クリアーＩⅡＡＢ受 Step Up101]

すべての目の出方は　6^4 通り

(1)　(ア)　$a_1<a_2<a_3<a_4$ となる目の出方は，1 ～ 6 の目の中から異なる 4 個を選び，

小さい順に a_1，a_2，a_3，a_4 とすればよいから　${}_6C_4={}_6C_2$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_6C_2}{6^4}=\dfrac{15}{6^4}={}^{ア}\dfrac{5}{432}$

(イ)　$a_1\leqq a_2\leqq a_3\leqq a_4$ となる目の出方は，1 ～ 6 の目の中から重複を許して 4 個選び，

小さい順に a_1，a_2，a_3，a_4 とすればよいから　${}_{6+4-1}C_4={}_9C_4$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_9C_4}{6^4}=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\dfrac{1}{6^4}={}^{イ}\dfrac{7}{72}$

(2)　出る目の最大値を m とする。

$m\leqq4$ となるのは，すべて 4 以下の目が出る場合であるから，その確率は　$\dfrac{4^4}{6^4}$

$m\leqq3$ となる確率も同様に　$\dfrac{3^4}{6^4}$

ゆえに，$m=4$ となる確率は　$\dfrac{4^4}{6^4}-\dfrac{3^4}{6^4}={}^{ウ}\dfrac{175}{1296}$

$\boxed{30}$ [三訂版クリアーⅠⅡAB受 Step Up103]

(1)　さいころを 2 回投げて 1 以外の異なる目が出ればよいから　$\dfrac{{}_5\mathrm{P}_2}{6^2}=\dfrac{5}{9}$

(2)　正三角形となるのは，P_1 以外の 2 点が $(\mathrm{P}_3,\ \mathrm{P}_5)$ のとき，すなわち，

$(j,\ k)=(3,\ 5),\ (5,\ 3)$ のときであるから　$\dfrac{2}{6^2}=\dfrac{1}{18}$

(3)　直角三角形となるのは

[1]　$\angle \mathrm{P}_1$ が直角のとき

P_1 以外の 2 点が $(\mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_5)$ または $(\mathrm{P}_3,\ \mathrm{P}_6)$ のとき，すなわち，

$(j,\ k)=(2,\ 5),\ (5,\ 2),\ (3,\ 6),\ (6,\ 3)$ のときであるから 4 通りある。

[2]　$\angle \mathrm{P}_1$ が直角でないとき

1 点は P_4 であり，もう 1 点が P_2，P_3，P_5，P_6 のとき，すなわち，

$(j,\ k)=(2,\ 4),\ (3,\ 4),\ (5,\ 4),\ (6,\ 4),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 5),\ (4,\ 6)$ であるから

8 通りある。

[1]，[2] より，求める確率は　$\dfrac{4+8}{6^2}=\dfrac{1}{3}$

$\boxed{31}$ [三訂版クリアーⅠⅡAB受 Step Up107]

(1)　$|a-b|\geqq 5$ となる $(a,\ b)$ の組は　$(a,\ b)=(1,\ 6),\ (6,\ 1)$

よって，求める確率は　$1-\dfrac{2}{6^2}=\dfrac{17}{18}$

(2)　$a<5$ である事象を A，$|a-b|<5$ である事象を B とする。

$$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$a<5$ かつ $|a-b|<5$ である事象は

$a=1$ のとき　　$b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$a=2,\ 3,\ 4$ のとき　$b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

よって　$P(A\cap B)=\dfrac{5+6\cdot 3}{6^2}=\dfrac{23}{36}$

したがって，求める確率は　$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{23}{36}\div\dfrac{2}{3}=\dfrac{23}{24}$

$\boxed{32}$ [三訂版クリアーⅠⅡAB受 Step Up113]

(1)　AB＝AC であるから　　$\angle B=\angle C=72^\circ$

よって　　$\angle A=180^\circ-(72^\circ+72^\circ)=36^\circ$

線分 BD は ∠B を 2 等分するから

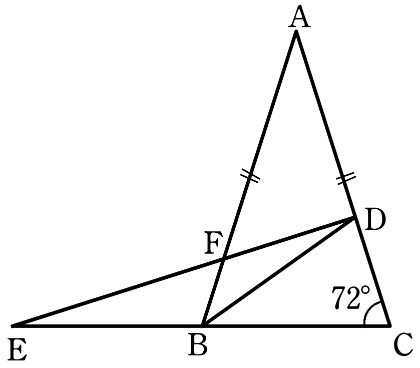
$\angle CBD=36^\circ$

ゆえに，△ABC と △BCD において

$\angle A=\angle CBD=36^\circ$

$\angle ABC=\angle BCD=72^\circ$

2 組の角がそれぞれ等しいから，△ABC と △BCD は相似。



(2)　DC＝1 とし，AD＝x とおく。

∠DAB＝∠DBA より　　AD＝BD＝x

∠BCD＝∠BDC より　　BD＝BC＝x

(1) より AC：BD＝BC：CD であるから　　$(x+1):x=x:1$

よって　　$x^2=x+1$　　　$x>0$ であるから　　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

したがって　　AD：DC＝$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}:1$

(3)　△ABC と直線 DE に関して，メネラウスの定理から　　$\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BE}{EC}\cdot\dfrac{CD}{DA}=1$

よって　　$\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{EC}{BE}\cdot\dfrac{DA}{CD}=\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\sqrt{5}$

したがって　　AF：FB＝$(1+\sqrt{5}):1$

$\boxed{33}$ [三訂版クリアーⅠⅡAB受 Step Up117]

BC∥XY より，平行線の錯角は等しいから

∠BPX＝∠PBC

円周角の定理により　∠PBC＝∠PAC

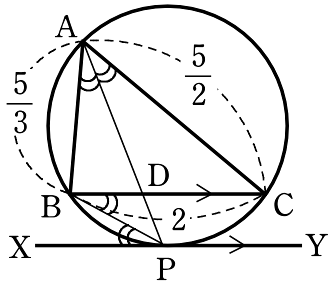
接弦定理により　　　∠BPX＝∠BAP

以上から　　∠BAP＝∠PAC

よって，AP は ∠BAC の二等分線であるから

$$BD:DC=AB:AC=\frac{5}{3}:\frac{5}{2}=2:3$$

したがって　　$BD=\dfrac{2}{2+3}BC=\dfrac{2}{5}\cdot 2=\dfrac{4}{5}$



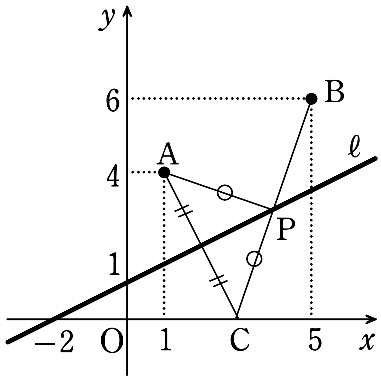
34 [三訂版クリアーⅠⅡＡＢ受 Step Up123]

(1)　Cの座標を $(p,\ q)$ とする。

対称の条件から

[1]　線分ACの中点が ℓ 上にある

[2]　$AC \perp \ell$



よって　$\dfrac{q+4}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p+1}{2}+1$,

$\dfrac{q-4}{p-1}\cdot\dfrac{1}{2}=-1$

ゆえに　$p-2q=3,\ 2p+q=6$

これを解いて　$p=3,\ q=0$　　よって　$C(3,\ 0)$

(2)　$AP=CP$ から　$AP+PB=CP+PB \geqq BC$

よって，$AP+PB$ は，Pが直線BCと直線 ℓ との交点のとき最小となる。

直線BCの方程式は　$y-0=\dfrac{6-0}{5-3}(x-3)$　　すなわち　$y=3x-9$

これと ℓ：$y=\dfrac{1}{2}x+1$ から　$x=4,\ y=3$

よって，$AP+PB$ を最小にするものは　$P(4,\ 3)$

35 [三訂版クリアーⅠⅡＡＢ受 Step Up129]

k を定数として，次の方程式で表される図形は，C_1，C_2 の2つの交点を通る。

$$k(x^2+y^2-25)+(x-4)^2+(y-3)^2-2=0 \quad \cdots\cdots ①$$

(1)　① で $k=-1$ とすると　$8x+6y-48=0$

すなわち　$y=-\dfrac{4}{3}x+8$　　これが求める直線の方程式である。

(2)　① の表す図形が点 $(3,\ 1)$ を通るとき

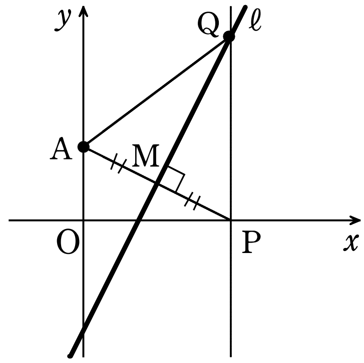
$k(3^2+1^2-25)+(3-4)^2+(1-3)^2-2=0$　　よって　$k=\dfrac{1}{5}$

これを ① に代入して整理すると　$x^2+y^2-\dfrac{20}{3}x-5y+15=0$

これが求める円の方程式である。

$\boxed{36}$ [三訂版クリアーⅠⅡAB受 Step Up135]

(1)　線分 AP の中点を M とおく。



$\triangle$AMQ と $\triangle$PMQ において

AM＝PM，MQ は共通，

$\angle$AMQ＝$\angle$PMQ＝90°

よって　　$\triangle$AMQ$\equiv\triangle$PMQ

したがって　　AQ＝QP

(2)　Q$(x,\ y)$とおく。

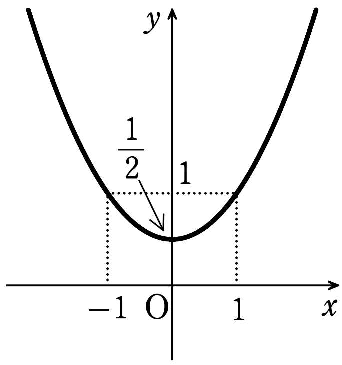
$$\mathrm{AQ}=\sqrt{x^2+(y-1)^2},\ \mathrm{QP}=|y|$$

AQ＝QP であるから　　$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=|y|$　……①

① の両辺は正であり，2 乗すると

$$x^2+(y-1)^2=y^2$$

よって　　$y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$



逆にこのとき，AQ＝QP で，Q は線分 AP の垂直二等分線上にあり，条件を満たす。

ゆえに，点 Q の軌跡は放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ であり，右の図のようになる。

$\boxed{37}$ [三訂版クリアーⅠⅡAB受 Step Up139]

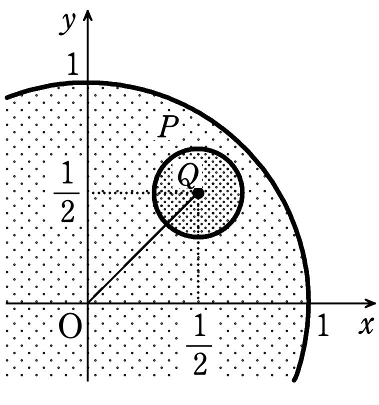
条件 p，q が表す領域をそれぞれ P，Q とする。

条件 q が条件 p であるための十分条件となるとき，命題 $q\Longrightarrow p$ が真であるから，

$Q\subset P$ となる。

また，$Q\subset P$ となるための条件は，2 円 $x^2+y^2=1$，

$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=a^2$ の中心間の距離について



$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\leqq 1-a$$

よって　　$a\leqq 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$a>0$ であるから，求める a の値の範囲は

$$0<a\leqq 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\boxed{38}$ [三訂版クリアーⅠⅡAB受 Step Up145]

(1) $f(x)=ax^2+bx+c$ とする。

$y=f(x)$ のグラフが3点 A，B，C を通るから

$$4=a+b+c,\ 0=a-b+c,\ 7=4a-2b+c$$

これを解いて　$a=3$，$b=2$，$c=-1$　　よって　$f(x)=3x^2+2x-1$

(2) 直線 AC の方程式は　$y-4=\dfrac{7-4}{-2-1}(x-1)$　　すなわち　$x+y-5=0$

ゆえに，点 $P(p,\ 3p^2+2p-1)$ と直線 AC の距離 d は

$$d=\frac{|p+3p^2+2p-1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3|p^2+p-2|}{\sqrt{2}}$$

ここで　$p^2+p-2=(p-1)(p+2)$

$-2<p<1$ であるから　$p^2+p-2<0$

よって　$d=\dfrac{-3(p^2+p-2)}{\sqrt{2}}$

また　$AC=\sqrt{(-2-1)^2+(7-4)^2}=3\sqrt{2}$

ゆえに　$\triangle ACP=\dfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\dfrac{-3(p^2+p-2)}{\sqrt{2}}=-\dfrac{9}{2}(p^2+p-2)$

(3) $\triangle ACP=-\dfrac{9}{2}\left(p+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{81}{8}$

$-2<p<1$ であるから，$\triangle ACP$ が最大となるとき　$p=-\dfrac{1}{2}$

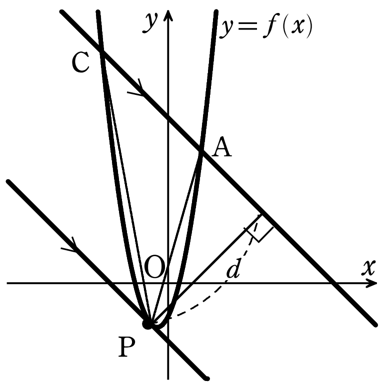
よって，求める点 P の座標は　$\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{5}{4}\right)$

$\boxed{\text{別解}}$ $\triangle ACP$ の面積が最大となるとき，右の図より，点 P における放物線 $y=f(x)$ の接線は直線 AC に平行である。

$y=3x^2+2x-1$ より　$y'=6x+2$

よって，$6p+2=-1$ より　$p=-\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$P\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{5}{4}\right)$



39 [三訂版クリアーⅠⅡAB受 Step Up149]

余弦定理により，$a\cos A = c\cos C$ は　$a\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = c\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

よって　$a^2(b^2+c^2-a^2)-c^2(a^2+b^2-c^2)=0$

ゆえに　$(a^2-c^2)\{b^2-(a^2+c^2)\}=0$　　よって　$a=c$ または $b^2=a^2+c^2$

ゆえに，△ABC は　BC＝AB の二等辺三角形 または ∠B＝90° の直角三角形

40 [三訂版クリアーⅠⅡAB受 Step Up149]

x，$x+1$，$x+2$ は辺の長さであるから　$x>0$

3 辺の長さが x，$x+1$，$x+2$ である三角形が存在するための条件は，$x<x+1<x+2$ より　$x+2<x+(x+1)$

よって　$x>1$　……①　　このとき，$x>0$ を満たす。

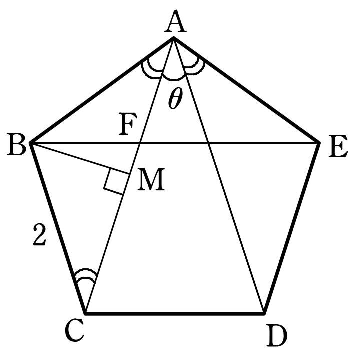
また，この三角形が鈍角三角形となるための条件は　$x^2+(x+1)^2<(x+2)^2$

すなわち　$x^2-2x-3<0$　　よって　$(x-3)(x+1)<0$

したがって　$-1<x<3$　……②

①，② より，求める x の値の範囲は　$1<x<3$

41 [三訂版クリアーⅠⅡAB受 Step Up155]



(1)　BE∥CD，AC∥ED で，CD＝ED であるから，
四角形 FCDE はひし形である。
よって　FC＝CD＝2
ゆえに　AF＝AC－^{ア}2

(2)　BC∥AD であるから　∠BCA＝∠CAD＝θ
また，(1) から　CF＝BC＝2
さらに，AC＝AD であるから
△ACD∽△CBF
よって　AC：CB＝CD：BF
BF＝AF＝AC－2 であるから　AC：2＝2：(AC－2)
よって　AC(AC－2)＝4　　すなわち　$\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AC}-4=0$
AC＞0 であるから　AC＝$^{イ}1+\sqrt{5}$
△ABC は二等辺三角形であるから，点 B から線分 AC に垂線 BM を下ろすと，M は線分 AC の中点である。

よって　$\cos\theta=\cos\angle\mathrm{BCM}=\dfrac{\mathrm{CM}}{\mathrm{BC}}=\dfrac{\mathrm{AC}}{2\mathrm{BC}}=^{ウ}\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

(3)　∠BAC＝∠EAD＝θ であるから，正五角形 ABCDE の面積は

$$\triangle\mathrm{BAC}+\triangle\mathrm{CAD}+\triangle\mathrm{DAE}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE}\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\{2\cdot(1+\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})^2+(1+\sqrt{5})\cdot 2\}\sin\theta=({}^{エ}5+3\sqrt{5})\sin\theta$$

$\boxed{42}$ [三訂版クリアーⅠⅡAB受 Step Up159]

$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{4}$，$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{4}$ から

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{4} \quad \cdots\cdots ①, \qquad \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ②$$

(①＋②)÷2 から　$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ③

(②－①)÷2 から　$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{4}$

したがって　$\cos^2\alpha\cos^2\beta=(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)$

$$=1-(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)+\sin^2\alpha\sin^2\beta$$

$$=1-(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)+\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{17}{16}-(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)$$

③ より $\cos^2\alpha\cos^2\beta=\dfrac{1}{4}$ であるから　$\dfrac{17}{16}-(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)=\dfrac{1}{4}$

よって　$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\dfrac{13}{16}$