$\boxed{1}$ [改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training5]

$x^2+3xy+2y^2+2x+5y-3$ を因数分解せよ。

解説

(与式) $=x^2+(3y+2)x+2y^2+5y-3=x^2+(3y+2)x+(y+3)(2y-1)$

$=\{x+(y+3)\}\{x+(2y-1)\}=(x+y+3)(x+2y-1)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & \longrightarrow 6 \\ 2 & -1 & \longrightarrow -1 \\ \hline 2 & -3 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & y+3 & \longrightarrow y+3 \\ 1 & 2y-1 & \longrightarrow 2y-1 \\ \hline 1 & (y+3)(2y-1) & 3y+2 \end{array}$$

別解　(与式) $=(x+y)(x+2y)+2x+5y-3$

$=(x+y)(x+2y)-(x+y)+3(x+2y)-3=(x+y+3)(x+2y-1)$

$\boxed{2}$ [改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training5]

$(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+15$ を因数分解せよ。

解説

(与式) $=\{(x-1)(x-7)\}\{(x-3)(x-5)\}+15=\{(x^2-8x)+7\}\{(x^2-8x)+15\}+15$

$=(x^2-8x)^2+22(x^2-8x)+120=(x^2-8x+10)(x^2-8x+12)$

$=(x-2)(x-6)(x^2-8x+10)$

$\boxed{3}$ [改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training5]

x^4-8x^2-9 を因数分解せよ。

解説

(与式) $=(x^2)^2-8x^2-9=(x^2-9)(x^2+1)=(x+3)(x-3)(x^2+1)$

$\boxed{4}$ [改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training5]

x^4+4 を因数分解せよ。

解説

(与式) $=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=\{(x^2+2)+2x\}\{(x^2+2)-2x\}$

$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

$\boxed{5}$ [改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training7]

(1)　$(1+\sqrt{5}-\sqrt{6})(1+\sqrt{5}+\sqrt{6})$ を計算せよ。

(2)　$\dfrac{10}{1+\sqrt{5}-\sqrt{6}}$ の分母を有理化せよ。

解説

(1)　(与式) $=\{(1+\sqrt{5})-\sqrt{6}\}\{(1+\sqrt{5})+\sqrt{6}\}=(1+\sqrt{5})^2-(\sqrt{6})^2$

$=(6+2\sqrt{5})-6=2\sqrt{5}$

(2)　(与式) $=\dfrac{10(1+\sqrt{5}+\sqrt{6})}{(1+\sqrt{5}-\sqrt{6})(1+\sqrt{5}+\sqrt{6})}=\dfrac{10(1+\sqrt{5}+\sqrt{6})}{2\sqrt{5}}$

$=\sqrt{5}(1+\sqrt{5}+\sqrt{6})=5+\sqrt{5}+\sqrt{30}$

$\boxed{6}$ [改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training17]

a と b は実数とする。これらが $a+b=1$，$ab=-1$ を満たすとき，a^2+b^2，a^3+b^3，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$ の値を求めよ。

解説

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1^2-2\cdot(-1)=3$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=1^3-3\cdot(-1)\cdot1=4$

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{-1}=-1$

$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\dfrac{3}{(-1)^2}=3$

別解　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=1\cdot\{3-(-1)\}=4$

$\boxed{7}$ [改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training19]

和が 2 で，2 乗の和が $2\sqrt{3}$ であるような 2 つの数について，それらの 3 乗の和，5 乗の和を求めよ。

解説

条件を満たす 2 つの数を x，y とすると　$\begin{cases} x+y=2 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=2\sqrt{3} & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② から　$(x+y)^2-2xy=2\sqrt{3}$

① を代入して　$2^2-2xy=2\sqrt{3}$　　よって　$xy=2-\sqrt{3}$

このとき　$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=2\{2\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})\}=6\sqrt{3}-4$

また　$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)=2\sqrt{3}(6\sqrt{3}-4)-(2-\sqrt{3})^2\cdot2$

$=36-8\sqrt{3}-14+8\sqrt{3}=22$

$\boxed{8}$ [改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training31]

$1-x\leqq4x+7\leqq x+3a$ を満たす整数 x が 1 つだけになるような整数 a を求めよ。

解説

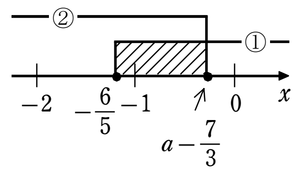
$1-x\leqq4x+7$ より　$x\geqq-\dfrac{6}{5}$　……①　$4x+7\leqq x+3a$ より　$x\leqq a-\dfrac{7}{3}$　……②

右の図から，①，② の共通範囲に整数が 1 つだけ

となるとき　$-1\leqq a-\dfrac{7}{3}<0$

よって　$\dfrac{4}{3}\leqq a<\dfrac{7}{3}$

ゆえに，求める整数 a は　$a=2$



$\boxed{9}$ [改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training33]

$\left|\dfrac{1}{2}x-1\right|=2x-1$ を解け。

解説

[1]　$\dfrac{1}{2}x-1\geqq0$ すなわち $x\geqq2$ のとき　$\dfrac{1}{2}x-1=2x-1$

これを解くと　$x=0$　　これは $x\geqq2$ を満たさない。

[2]　$\dfrac{1}{2}x-1<0$ すなわち $x<2$ のとき

$-\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)=2x-1$　これを解くと　$x=\dfrac{4}{5}$　　これは $x<2$ を満たす。

[1]，[2] から，求める解は　$x=\dfrac{4}{5}$

$\boxed{10}$ [改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training33]

$2|x-1|-3|x+3|=5$ を解け。

解説

[1]　$x-1\geqq0$ かつ $x+3\geqq0$ すなわち $x\geqq1$ のとき

$2(x-1)-3(x+3)=5$

これを解くと　$x=-16$　　これは $x\geqq1$ を満たさない。

[2]　$x-1<0$ かつ $x+3\geqq0$ すなわち $-3\leqq x<1$ のとき

$-2(x-1)-3(x+3)=5$

これを解くと　$x=-\dfrac{12}{5}$　　これは $-3\leqq x<1$ を満たす。

[3]　$x-1<0$ かつ $x+3<0$ すなわち $x<-3$ のとき

$-2(x-1)+3(x+3)=5$

これを解くと　$x=-6$　　これは $x<-3$ を満たす。

[1]～[3] から，求める解は　$x=-\dfrac{12}{5}$，-6

$\boxed{11}$ [改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training33]

$|10-9x|<6-x$ を解け。

解説

[1]　$10-9x\geqq0$ すなわち $x\leqq\dfrac{10}{9}$ のとき

$10-9x<6-x$　　これを解くと　$x>\dfrac{1}{2}$

$x\leqq\dfrac{10}{9}$ より　$\dfrac{1}{2}<x\leqq\dfrac{10}{9}$

[2]　$10-9x<0$ すなわち $x>\dfrac{10}{9}$ のとき

$-(10-9x)<6-x$　　これを解くと　$x<\dfrac{8}{5}$

$x>\dfrac{10}{9}$ より　$\dfrac{10}{9}<x<\dfrac{8}{5}$

[1]，[2] から，求める解は　$\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{8}{5}$

$\boxed{12}$ [改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Training33]

$|x-2|+|x+3|<6$ を解け。

解説

[1]　$x-2\geqq0$ かつ $x+3\geqq0$ すなわち $x\geqq2$ のとき

$x-2+x+3<6$　　これを解くと　$x<\dfrac{5}{2}$

$x\geqq2$ より　$2\leqq x<\dfrac{5}{2}$

[2]　$x-2<0$ かつ $x+3\geqq0$ すなわち $-3\leqq x<2$ のとき

$-(x-2)+x+3<6$　　すなわち　$5<6$

よって，$-3\leqq x<2$ は不等式の解である。

[3]　$x-2<0$ かつ $x+3<0$ すなわち $x<-3$ のとき

$-(x-2)-(x+3)<6$　　すなわち　$x>-\dfrac{7}{2}$

$x<-3$ より　$-\dfrac{7}{2}<x<-3$　　[1]～[3] から，求める解は　$-\dfrac{7}{2}<x<\dfrac{5}{2}$