[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready242]

(1)　$(2x^2-1)^5$ の展開式の一般項は　${}_5\mathrm{C}_r(2x^2)^{5-r}(-1)^r={}_5\mathrm{C}_r\,2^{5-r}\cdot(-1)^r x^{2(5-r)}$

$2(5-r)=4$ から　　$r=3$

よって，x^4 の項は $r=3$ のときであるから，その係数は

${}_5\mathrm{C}_3\,2^2\cdot(-1)^3=10\cdot4\cdot(-1)=-40$

(2)　$(x^2-3y)^4$ の展開式の一般項は　${}_4\mathrm{C}_r(x^2)^{4-r}\cdot(-3y)^r={}_4\mathrm{C}_r(-3)^r\cdot x^{2(4-r)}y^r$

x^2y^3 の項は $r=3$ のときであるから，その係数は

${}_4\mathrm{C}_3(-3)^3=4\cdot(-27)=-108$

(3)　$\left(-x+\dfrac{3}{x}\right)^6$ の展開式の一般項は　${}_6\mathrm{C}_r(-x)^{6-r}\left(\dfrac{3}{x}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r(-1)^{6-r}\cdot3^r\cdot\dfrac{x^{6-r}}{x^r}$

$\dfrac{x^{6-r}}{x^r}=1$ から　　$x^{6-r}=x^r$　　　よって　　$6-r=r$

ゆえに　　$r=3$

したがって，定数項は $r=3$ のときであるから，その値は

${}_6\mathrm{C}_3(-1)^3\cdot3^3=20\cdot(-1)\cdot27=-540$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready243]

(1)　右の計算より

商　$\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{8}$

余り　$\dfrac{5}{8}$

$$
\begin{array}{r}
\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{8} \\
2x-1\,\big)\,x^3\qquad -x\quad +1 \\
x^3-\dfrac{1}{2}x^2\qquad\qquad \\
\hline
\dfrac{1}{2}x^2-x\quad \\
\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{4}x\quad \\
\hline
-\dfrac{3}{4}x+1 \\
-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{8} \\
\hline
\dfrac{5}{8}
\end{array}
$$

(2)　ある整式を A とすると

$A=(x^2+4x+5)(2x-3)-x+4$

$=2x^3+5x^2-3x-11$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready244]

(1)　(与式)$=\dfrac{(2x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}\times\dfrac{(x+3)(x+2)}{(2x+1)(x+3)}=1$

(2)　(与式)$=\dfrac{3}{(x-3)(x+3)}-\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{3(x+1)-(x-3)}{(x-3)(x+3)(x+1)}$

$=\dfrac{2(x+3)}{(x-3)(x+3)(x+1)}=\dfrac{2}{(x-3)(x+1)}$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready255]

(1)　右辺を整理すると　　$x^2-5=(a+b+c)x^2+(-a+c)x-b$

両辺の同じ次数の項の係数を比較すると　　$a+b+c=1$，　$-a+c=0$，　$-b=-5$

よって　　$a=-2$，$b=5$，$c=-2$

$\boxed{\text{別解}}$　与式に　$x=0$ を代入すると　　$-5=-b$

$x=1$ を代入すると　　$-4=2c$

$x=-1$ を代入すると　$-4=2a$

よって　　$a=-2$，$b=5$，$c=-2$

逆に，このとき与式の右辺は $-2x(x-1)+5(x+1)(x-1)-2x(x+1)=x^2-5$ となり，左辺と一致するから，与式は恒等式である。

よって　　$a=-2$，$b=5$，$c=-2$

(2)　両辺に $(x-2)(x+3)$ を掛けると　　$2x-1=a(x+3)+b(x-2)$　……①

右辺を整理すると　　$2x-1=(a+b)x+(3a-2b)$

両辺の同じ次数の項の係数を比較すると　　$a+b=2$，　$3a-2b=-1$

よって　　$a=\dfrac{3}{5}$，$b=\dfrac{7}{5}$

$\boxed{\text{別解}}$　①に　$x=2$ を代入すると　　$3=5a$

$x=-3$ を代入すると　$-7=-5b$

よって　　$a=\dfrac{3}{5}$，$b=\dfrac{7}{5}$

逆に，このときの①の右辺は $\dfrac{3}{5}(x+3)+\dfrac{7}{5}(x-2)=2x-1$ となり左辺と一致するから，①は恒等式である。

よって　　$a=\dfrac{3}{5}$，$b=\dfrac{7}{5}$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready256]

(1)　(左辺)$=a^2x^2-b^2x^2-a^2y^2+b^2y^2$

(右辺)$=(a^2x^2-2abxy+b^2y^2)-(b^2x^2-2abxy+a^2y^2)$

$=a^2x^2-b^2x^2-a^2y^2+b^2y^2$

よって　　$(x^2-y^2)(a^2-b^2)=(ax-by)^2-(bx-ay)^2$

(2)　$a+b+c=0$ より　　$c=-a-b$

(左辺)$=a^3+b^3+(-a-b)^3$

$=a^3+b^3+\{(-a)^3+3(-a)^2(-b)+3(-a)(-b)^2+(-b)^3\}$

$=a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3=-3a^2b-3ab^2=3ab(-a-b)$

$=3abc=$(右辺)

よって　　$a^3+b^3+c^3=3abc$

$\boxed{\text{別解}}$　(左辺)$-$(右辺)$=a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$a+b+c=0$ より　　(左辺)$-$(右辺)$=0$

よって　　$a^3+b^3+c^3=3abc$

(3)　$\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}=k$ とおくと

$x=k(b-c)$　……①，　$y=k(c-a)$　……②，　$z=k(a-b)$　……③

①，②，③より　　$ax+by+cz=a\cdot k(b-c)+b\cdot k(c-a)+c\cdot k(a-b)$

$=k(ab-ca+bc-ab+ca-bc)=0$

よって　　$ax+by+cz=0$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready257]

(1)　$(x^2+1)(y^2+1)-(xy+1)^2=x^2y^2+x^2+y^2+1-(x^2y^2+2xy+1)$

$=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2\geqq0$

よって　　$(x^2+1)(y^2+1)\geqq(xy+1)^2$

等号が成り立つのは，$x-y=0$ すなわち $x=y$　のとき。

(2)　$(\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+4b})^2=a+4\sqrt{ab}+4b-(a+4b)=4\sqrt{ab}$

$a>0$，$b>0$ より，$4\sqrt{ab}>0$ であるから　　$(\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+4b})^2$

$\sqrt{a}+2\sqrt{b}>0$，$\sqrt{a+4b}>0$ であるから　　$\sqrt{a}+2\sqrt{b}>\sqrt{a+4b}$

(3)　$a>0$，$b>0$ より $\dfrac{a}{b}>0$，$\dfrac{b}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqq2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}=2$

等号が成り立つのは，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$ すなわち $a=b$ のときである。

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready269]

(1)　(与式)$=\dfrac{2i(3-i)}{(3+i)(3-i)}-\dfrac{(2-i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\dfrac{6i-2i^2}{9-i^2}-\dfrac{2+6i-i-3i^2}{1-9i^2}$

$=\dfrac{6i+2}{10}-\dfrac{5+5i}{10}=\dfrac{i-3}{10}$

(2)　左辺を展開すると　　$a-bi+3ai-3bi^2=-2i$

よって　　$(a+3b)+(3a-b)i=-2i$

a，b は実数より，$a+3b$，$3a-b$ も実数であるから　　$a+3b=0$，$3a-b=-2$

これを解くと　　$a=-\dfrac{3}{5}$，$b=\dfrac{1}{5}$

$\boxed{\text{別解}}$　等式より　　$a-bi=\dfrac{-2i}{1+3i}$

(右辺)$=\dfrac{-2i(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{-2i(1-3i)}{1-9i^2}=\dfrac{-i+3i^2}{5}=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}i$

よって　　$a-bi=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}i$

a，b は実数であるから　　$a=-\dfrac{3}{5}$，$b=\dfrac{1}{5}$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready270]

判別式を D とすると　　$D=(-m)^2-4\cdot1\cdot5=m^2-20$

虚数解をもつための条件は　　$D<0$

すなわち　　$m^2-20<0$　　　よって　　$-2\sqrt{5}<m<2\sqrt{5}$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready271]

(1)，(2)　解と係数の関係から　　$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$

(3)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot(-1)=3$

(4)　$(\alpha-2\beta)(\beta-2\alpha)=\alpha\beta-2\alpha^2-2\beta^2+4\alpha\beta=5\alpha\beta-2(\alpha^2+\beta^2)=5\cdot(-1)-2\cdot3=-11$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready281]

$P(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りが -3 となるための条件は　　$P(-1)=-3$

すなわち　　$(-1)^3+a(-1)^2-4=-3$　　　よって　　$a=2$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready282]

$P(x)$ が $2x+1$ で割り切れるための条件は　　$P\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$

すなわち　　$2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3-a\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+2=0$　　　よって　　$a=7$

［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready283］

(1)　与えられた方程式から　$x^3-1=0$　　よって　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

ゆえに　$x-1=0$ または $x^2+x+1=0$

$x^2+x+1=0$ より　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$　　よって　$x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(2)　与えられた方程式から　$(x^2-3)(x^2-1)=0$

よって　$x^2-3=0$ または $x^2-1=0$

$x^2-3=0$ から　$x=\pm\sqrt{3}$

$x^2-1=0$ から　$x=\pm1$

よって　$x=\pm1,\ \pm\sqrt{3}$

(3)　$P(x)=x^3+x^2-7x+2$ とすると　$P(2)=2^3+2^2-7\cdot2+2=0$

よって，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつから　$P(x)=(x-2)(x^2+3x-1)$

$P(x)=0$ から　$x-2=0$ または $x^2+3x-1=0$

$x^2+3x-1=0$ から　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$　　よって　$x=2,\ \dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

(4)　$P(x)=2x^4-3x^3+2x^2-1$ とすると　$P(1)=2\cdot1^4-3\cdot1^3+2\cdot1^2-1=0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつから　$P(x)=(x-1)(2x^3-x^2+x+1)$

次に，$Q(x)=2x^3-x^2+x+1$ とすると

$$Q\left(-\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3-\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0$$

よって，$Q(x)$ は $2x+1$ を因数にもつから　$Q(x)=(2x+1)(x^2-x+1)$

ゆえに　$P(x)=(x-1)(2x+1)(x^2-x+1)$

$x^2-x+1=0$ から　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

よって　$x=1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready294］

(1)　点Cの座標を $(c,\ 0)$ とする。

AC=BC すなわち $AC^2=BC^2$ から　$(c-1)^2+(0-2)^2=\{c-(-3)\}^2+(0-1)^2$

整理すると　$8c=-5$　　よって　$c=-\dfrac{5}{8}$

ゆえに，点Cの座標は　$\left(-\dfrac{5}{8},\ 0\right)$

(2)　点Dの座標は　$\left(\dfrac{1\cdot1+2\cdot(-3)}{2+1},\ \dfrac{1\cdot2+2\cdot1}{2+1}\right)$　　よって　$\left(-\dfrac{5}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$

(3)　点Eの座標は　$\left(\dfrac{-3\cdot1+2\cdot(-3)}{2-3},\ \dfrac{-3\cdot2+2\cdot1}{2-3}\right)$　　よって　$(9,\ 4)$

(4)　点Fの座標を $(x,\ y)$ とすると，△ABF の重心の座標は　$\left(\dfrac{1-3+x}{3},\ \dfrac{2+1+y}{3}\right)$

よって　$\left(\dfrac{x-2}{3},\ \dfrac{y+3}{3}\right)$

これが原点と一致するから　$\dfrac{x-2}{3}=0,\ \dfrac{y+3}{3}=0$

よって　$x=2,\ y=-3$

ゆえに，点Fの座標は　$(2,\ -3)$

［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready295］

(1)　$2x-6y+3=0$ より　$y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{2}$

よって，直線 ℓ の傾きは　$\dfrac{1}{3}$

ゆえに，直線 ℓ に平行な直線の方程式は，傾きが $\dfrac{1}{3}$ であり点A$(2,\ -1)$ を通るから

$y-(-1)=\dfrac{1}{3}(x-2)$　　よって　$y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{5}{3}$

また，直線 ℓ に垂直な直線の傾きを m とすると　$m\cdot\dfrac{1}{3}=-1$

これを解くと　$m=-3$

よって，直線 ℓ に垂直な直線の方程式は，傾きが -3 であり点A$(2,\ -1)$ を通るから

$y-(-1)=-3(x-2)$　　よって　$y=-3x+5$

(2)　求める距離は　$\dfrac{|2\cdot2-6\cdot(-1)+3|}{\sqrt{2^2+(-6)^2}}=\dfrac{|13|}{2\sqrt{10}}=\dfrac{13\sqrt{10}}{20}$

［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready306］

(1)　この円の中心は，2点 $(5,\ 5)$，$(-1,\ -3)$ を結ぶ線分の中点であるから，その座標は

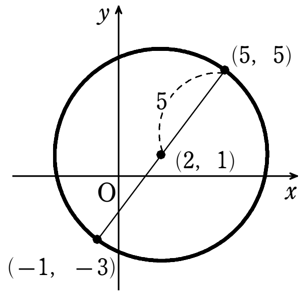
$\left(\dfrac{5+(-1)}{2},\ \dfrac{5+(-3)}{2}\right)$

よって　$(2,\ 1)$

半径 r は，中心 $(2,\ 1)$ と円上の点 $(5,\ 5)$ との距離であるから　$r^2=(5-2)^2+(5-1)^2=25$

よって，求める円の方程式は

$(x-2)^2+(y-1)^2=25$



(2)　円が点 $(2,\ 4)$ を通り，x 軸，y 軸の両方に接するから，円の中心は第1象限にある。

円の半径を r とすると，円の中心の座標は $(r,\ r)$ と表される。

この円の方程式は　$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

この円が $(2,\ 4)$ を通るから

$(2-r)^2+(4-r)^2=r^2$

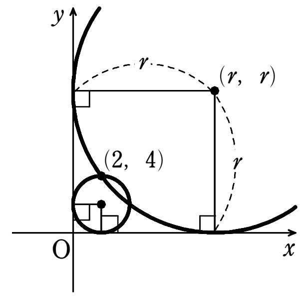
よって　$r^2-12r+20=0$

ゆえに　$(r-2)(r-10)=0$

これを解くと　$r=2,\ 10$

したがって，求める円の方程式は

$(x-2)^2+(y-2)^2=4$，　$(x-10)^2+(y-10)^2=100$



(3)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点 $(1,\ 3)$ を通るから　$1^2+3^2+l+3m+n=0$

点 $(4,\ 2)$ を通るから　$4^2+2^2+4l+2m+n=0$

点 $(5,\ -5)$ を通るから　$5^2+(-5)^2+5l-5m+n=0$

整理すると　$l+3m+n+10=0$

$4l+2m+n+20=0$

$5l-5m+n+50=0$

これを解くと　$l=-2,\ m=4,\ n=-20$

したがって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-2x+4y-20=0$

［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready307］

$y=2x+k$ を $x^2+y^2=9$ に代入して整理すると　$5x^2+4kx+k^2-9=0$

判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-9)=-k^2+45$

円 $x^2+y^2=9$ と直線 $y=2x+k$ が共有点をもつための条件は　$D\geqq0$

よって　$-k^2+45\geqq0$　　これを解くと　$-3\sqrt{5}\leqq k\leqq3\sqrt{5}$

$\boxed{\text{別解}}$　円 $x^2+y^2=9$ の中心は $(0,\ 0)$，半径は3である。

円 $x^2+y^2=9$ の中心と直線 $y=2x+k$ の距離を d とすると，共有点をもつための条件は　$d\leqq3$

$d=\dfrac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}$ であるから　$\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}\leqq3$　　よって　$|k|\leqq3\sqrt{5}$

ゆえに　$-3\sqrt{5}\leqq k\leqq3\sqrt{5}$

［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready308］

求める円の半径を r とする。

円 $x^2+y^2=4$ の中心は $(0,\ 0)$，半径は2である。

2つの円の中心間の距離 d は　$d=\sqrt{(-3-0)^2+(4-0)^2}=5$

[1]　2つの円が外接するとき　$r+2=5$　　よって　$r=3$

このとき，求める円の方程式は　$(x+3)^2+(y-4)^2=9$

[2]　2つの円が内接するとき　$|r-2|=5$　　$r>0$ であるから　$r=7$

このとき，求める円の方程式は　$(x+3)^2+(y-4)^2=49$

［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready319］

点Pの座標を $(x,\ y)$ とする。

(1)　Pの満たす条件は　PA=PB

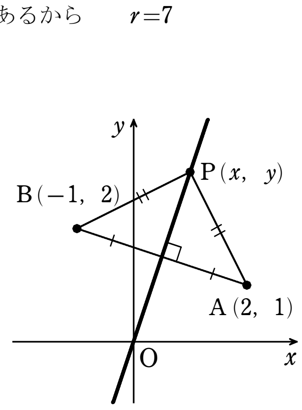
すなわち　$PA^2=PB^2$

よって

$(x-2)^2+(y-1)^2=\{x-(-1)\}^2+(y-2)^2$

整理すると　$y=3x$

したがって，求める軌跡は　直線 $y=3x$



(2)　Pの満たす条件は　　PA：PB＝1：2

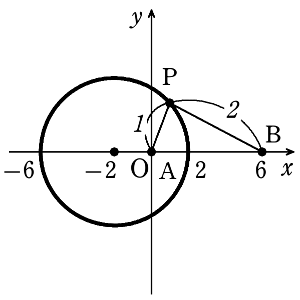
すなわち　　2PA＝PB　　　よって　　$4PA^2=PB^2$

ゆえに　　$4(x^2+y^2)=(x-6)^2+y^2$

整理すると　　$(x+2)^2+y^2=16$

したがって，求める軌跡は

中心 $(-2,\ 0)$，半径 4 の円

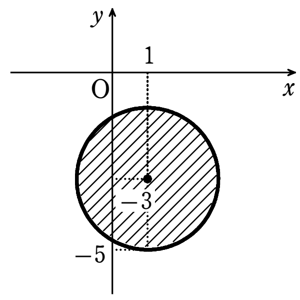


［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready320］

(1)　不等式を変形すると　　$(x-1)^2+(y+3)^2\leqq 4$

よって，求める領域は，円 $(x-1)^2+(y+3)^2=4$ の周および内部で，右の図の斜線部分である。

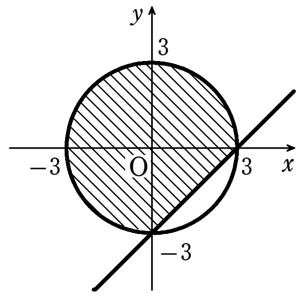
ただし，境界線を含む。



(2)　$x-y-3\leqq 0$ を変形すると　　$y\geqq x-3$

求める領域は，直線 $y=x-3$ の上側と，円 $x^2+y^2=9$ の周および内部の共通部分で，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



(3)　$(x+y-3)(2x-y+3)>0$ を連立不等式で表すと $\begin{cases}x+y-3>0\\2x-y+3>0\end{cases}$　または　$\begin{cases}x+y-3<0\\2x-y+3<0\end{cases}$

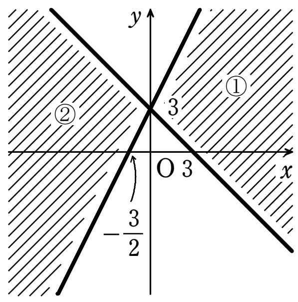
すなわち

$\begin{cases}y>-x+3\\y<2x+3\end{cases}$ ……①　または　$\begin{cases}y<-x+3\\y>2x+3\end{cases}$ ……②

求める領域は，① の表す領域と ② の表す領域の和集合である。

よって，求める領域は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線は含まない。



(4)　[1]　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき

$x+y<3$　　　すなわち　　$y<-x+3$

[2]　$x\geqq 0$，$y<0$ のとき

$x-y<3$　　　すなわち　　$y>x-3$

[3]　$x<0$，$y\geqq 0$ のとき

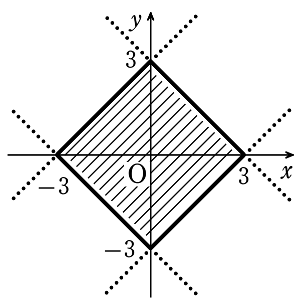
$-x+y<3$　　　すなわち　　$y<x+3$

[4]　$x<0$，$y<0$ のとき

$-x-y<3$　　　すなわち　　$y>-x-3$

[1]～[4] から，求める領域は右の図の斜線部分。

ただし，境界線は含まない。



［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready331］

(1)　$\cos\frac{7}{4}\pi=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(2)　$\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3)　$\tan\frac{13}{6}\pi=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready332］

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ より　　$\cos^2\alpha=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ より $\cos\alpha>0$ であるから　　$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ より　　$\sin^2\beta=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

$\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$ より $\sin\beta<0$ であるから　　$\sin\beta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

(1)　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{2+2\sqrt{10}}{9}$$

(2)　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$$

(3)　$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{3}\div\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，

$\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\div\frac{2}{3}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

よって　　$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}$

$$=\left(\frac{1-\sqrt{10}}{2\sqrt{2}}\right)\div\left(1+\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}\right)=\frac{1-\sqrt{10}}{2\sqrt{2}}\div\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2(1-\sqrt{10})}{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{2(1-\sqrt{10})(4\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(4\sqrt{2}+\sqrt{5})(4\sqrt{2}-\sqrt{5})}=\frac{2(9\sqrt{2}-9\sqrt{5})}{27}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{3}$$

(4)　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

(5)　$\tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=(-\sqrt{5})\div\left(1-\frac{5}{4}\right)=4\sqrt{5}$

(6)　$\cos^2\frac{\beta}{2}=\frac{1+\cos\beta}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{6}$

$\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$ より $\frac{3}{4}\pi<\frac{\beta}{2}<\pi$ であるから　　$\cos\frac{\beta}{2}<0$

よって　　$\cos\frac{\beta}{2}=-\sqrt{\frac{5}{6}}=-\frac{\sqrt{30}}{6}$

［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready333］

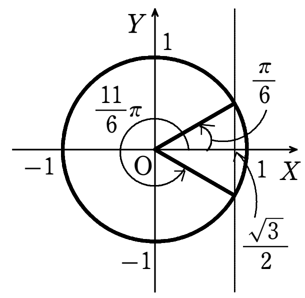
弧の長さは　　$3\cdot\frac{5}{7}\pi=\frac{15}{7}\pi$

面積は　　$\frac{1}{2}\cdot 3^2\cdot\frac{5}{7}\pi=\frac{45}{14}\pi$

［改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready343］

(1)　方程式を変形すると　　$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから，右の図より　　$x=\frac{\pi}{6}$，$\frac{11}{6}\pi$



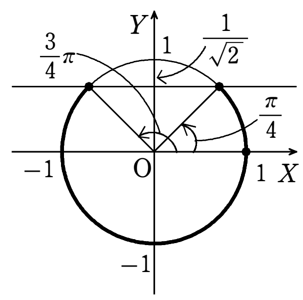
(2)　不等式を変形すると　　$\sin x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq x<2\pi$ の範囲で $\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす x の値は

$x=\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$

よって，右の図から，不等式を満たす x の値の範囲は

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi\leqq x<2\pi$



(3)　方程式を変形すると

$(2\cos^2 x-1)-3\cos x+2=0$

よって　$2\cos^2 x-3\cos x+1=0$

ゆえに　$(2\cos x-1)(\cos x-1)=0$

よって　$\cos x=\frac{1}{2}$　または　$\cos x=1$

$0\leqq x<2\pi$ であるから

$\cos x=\frac{1}{2}$ のとき　　$x=\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$

$\cos x=1$ のとき　　$x=0$

よって　　$x=0$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$

(4)　方程式を変形すると　　$2\sin x\cos x=\sin x$　　　よって　　$\sin x(2\cos x-1)=0$

ゆえに　　$\sin x=0$　または　$\cos x=\frac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから　　$\sin x=0$ のとき　　$x=0$，π

$\cos x=\frac{1}{2}$ のとき　　$x=\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$

よって　　$x=0$，$\frac{\pi}{3}$，π，$\frac{5}{3}\pi$

(5)　不等式を変形すると　　$(\cos x+2)(2\cos x-1)<0$　……①

$0\leqq x<2\pi$ より，$-1\leqq\cos x\leqq 1$ であるから，常に　　$\cos x+2>0$

ゆえに，① から　　$2\cos x-1<0$　　　よって　　$\cos x<\frac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから　　$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$

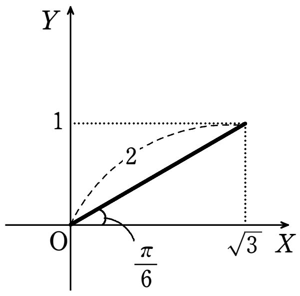
(6)　不等式を変形すると　$2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)>1$

よって　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)>\dfrac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{6}\leqq x-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{11}{6}\pi$ であるから

$\dfrac{\pi}{6}<x-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5}{6}\pi$

よって　$\dfrac{\pi}{3}<x<\pi$



[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready344]

関数を変形すると　$y=(1-\cos^2 x)+\cos x=-\cos^2 x+\cos x+1$

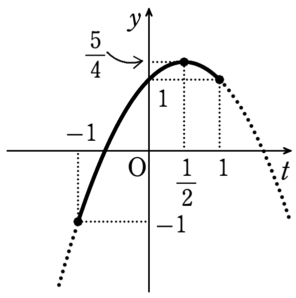
$\cos x=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ であるから　$-1\leqq t\leqq 1$

y を t で表すと　$y=-t^2+t+1=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$

$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で，y は　$t=\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{5}{4}$，

$t=-1$ で最小値 -1

をとる。



また，$0\leqq x<2\pi$ であるから

$t=\dfrac{1}{2}$ となるとき，$\cos x=\dfrac{1}{2}$ から　$x=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$

$t=-1$ となるとき，$\cos x=-1$ から　$x=\pi$

よって，y は　$x=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$ で最大値 $\dfrac{5}{4}$，

$x=\pi$　で最小値 -1

をとる。

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready354]

(1)　(与式)$=\sqrt[3]{2\cdot 3^3}-\sqrt[3]{2\cdot 5^3}+\sqrt[3]{2^4}=3\cdot\sqrt[3]{2}-5\cdot\sqrt[3]{2}+2\cdot\sqrt[3]{2}=0$

(2)　(与式)$=2^{\frac{1}{2}}\div 4^{\frac{1}{4}}\times 32^{\frac{1}{12}}\div 2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}\div 2^{\frac{2}{4}}\times 2^{\frac{5}{12}}\div 2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{5}{12}-\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$

(3)　(与式)$=(\sqrt[3]{2^4}+\sqrt[3]{2^3}+\sqrt[3]{2^2})(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2})$

$=\sqrt[3]{2^6}+\sqrt[3]{2^5}+\sqrt[3]{2^4}-\sqrt[3]{2^5}-\sqrt[3]{2^4}-\sqrt[3]{2^3}=2^2-2=2$

別解　(与式)$=(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})\{(\sqrt[3]{4})^2+\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2\}$

$=(\sqrt[3]{4})^3-(\sqrt[3]{2})^3=4-2=2$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready355]

(1)　(与式)$=\log_3\sqrt{2^5}+\dfrac{\log_3 54}{\log_3 9}-\dfrac{\log_3 6}{\log_3\sqrt{3}}=\log_3 2^{\frac{5}{2}}+\dfrac{\log_3(2\cdot 3^3)}{\log_3 3^2}-\dfrac{\log_3(2\cdot 3)}{\log_3 3^{\frac{1}{2}}}$

$=\dfrac{5}{2}\log_3 2+\dfrac{1}{2}(\log_3 2+3)-2(\log_3 2+1)=\log_3 2-\dfrac{1}{2}$

(2)　(与式)$=\left(\dfrac{\log_2 9}{\log_2 4}-\dfrac{\log_2 3}{\log_2 16}\right)\left(\dfrac{\log_2 16}{\log_2 9}-\dfrac{\log_2 8}{\log_2 3}\right)$

$=\left(\dfrac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2}-\dfrac{\log_2 3}{\log_2 2^4}\right)\left(\dfrac{\log_2 2^4}{\log_2 3^2}-\dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 3}\right)$

$=\left(\log_2 3-\dfrac{1}{4}\log_2 3\right)\left(\dfrac{2}{\log_2 3}-\dfrac{3}{\log_2 3}\right)=\dfrac{3}{4}\log_2 3\cdot\left(-\dfrac{1}{\log_2 3}\right)=-\dfrac{3}{4}$

(3)　$16^{\log_2 3}=M$ とおき，両辺の底 2 の対数をとると　$\log_2 16^{\log_2 3}=\log_2 M$

よって　$\log_2 2^{4\log_2 3}=\log_2 M$　　ゆえに　$4\log_2 3=\log_2 M$

したがって　$M=3^4$　　よって　$M=81$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready364]

(1)　方程式を変形すると　$2^{1-2x}=2^{5x}$

よって　$1-2x=5x$　　ゆえに　$x=\dfrac{1}{7}$

(2)　不等式を変形すると　$3^{2x}\leqq 3^{2-3x}$

底 3 は 1 より大きいから　$2x\leqq 2-3x$　　ゆえに　$x\leqq\dfrac{2}{5}$

(3)　方程式を変形すると　$(2^x)^2-6\cdot 2^x-16=0$

$2^x=t$ とおくと　$t>0$

方程式は　$t^2-6t-16=0$　　よって　$(t-8)(t+2)=0$

$t>0$ であるから　$t=8$　　よって　$2^x=8$

$8=2^3$ より　$x=3$

(4)　不等式を変形すると　$(2^x)^2+3\cdot 2^x-4\leqq 0$

$2^x=t$ とおくと　$t>0$

不等式は　$t^2+3t-4\leqq 0$　　よって　$(t+4)(t-1)\leqq 0$

ゆえに　$-4\leqq t\leqq 1$　　$t>0$ と合わせて　$0<t\leqq 1$

よって　$0<2^x\leqq 1$　　底 2 は 1 より大きいから　$x\leqq 0$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready365]

(1)　真数は正であるから　$x-2>0$　かつ　$2x-5>0$　　よって　$x>\dfrac{5}{2}$

方程式を変形すると　$\log_3(x-2)(2x-5)=\log_3 1$

よって　$(x-2)(2x-5)=1$　　変形すると　$2x^2-9x+9=0$

よって　$(2x-3)(x-3)=0$　　$x>\dfrac{5}{2}$ より　$x=3$

(2)　真数は正であるから　$x+1>0$　かつ　$x-2>0$　よって　$x>2$

不等式を変形すると　$\log_2(x+1)(x-2)<\log_2 2^2$

底 2 は 1 より大きいから　$(x+1)(x-2)<4$　　よって　$x^2-x-6<0$

ゆえに　$(x+2)(x-3)<0$　よって　$-2<x<3$　$x>2$ と合わせて　$2<x<3$

(3)　真数は正であるから　$x>0$

$\log_2 x=t$ とおくと，方程式は　$t^2+2t-8=0$

よって　$(t+4)(t-2)=0$　　ゆえに　$t=-4$，2

したがって　$\log_2 x=-4$，2　よって　$x=2^{-4}$，2^2　ゆえに　$x=\dfrac{1}{16}$，4

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready376]

(1)　$\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{(4^3-2\cdot 4)-(1^3-2\cdot 1)}{3}=19$

(2)　$f'(2)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{(2+h)^3-2(2+h)\}-(2^3-2\cdot 2)}{h}$

$=\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{(8+12h+6h^2+h^3-4-2h)-4}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{h^3+6h^2+10h}{h}$

$=\displaystyle\lim_{h\to 0}(h^2+6h+10)=10$

(3)　$f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{(x+h)^3-2(x+h)\}-(x^3-2x)}{h}$

$=\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-2x-2h)-x^3+2x}{h}$

$=\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{h^3+3xh^2+3x^2h-2h}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2+3xh+3x^2-2)=3x^2-2$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready377]

(1)　$y'=(x^3-2x^2+1)'=(x^3)'-2(x^2)'+(1)'=3x^2-4x$

(2)　$y=x^4+x^2-2$

よって　$y'=(x^4+x^2-2)'=(x^4)'+(x^2)'-(2)'=4x^3+2x$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready378]

(1)　$y'=-4x^3+3$

点 $(2,\ -9)$ における接線の傾きは　$-4\cdot 2^3+3=-29$

よって，求める接線の方程式は　$y-(-9)=-29(x-2)$

ゆえに　$y=-29x+49$

(2)　$y=x^3-x-2$ より　$y'=3x^2-1$

曲線 $y=x^3-x-2$ の $x=t$ における接線の方程式は

$y-(t^3-t-2)=(3t^2-1)(x-t)$　　よって　$y=(3t^2-1)x-2t^3-2$

これが $y=kx$ と一致するから　$3t^2-1=k$　かつ　$-2t^3-2=0$

$-2t^3-2=0$ より　$t^3=-1$　　t は実数であるから　$t=-1$

$3t^2-1=k$ より　$k=3\cdot(-1)^2-1=2$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready388]

(1)　$y'=3x^2-12=3(x^2-4)=3(x-2)(x+2)$

$y'=0$ とすると　$x=\pm 2$

y の増減表は次のようになる。

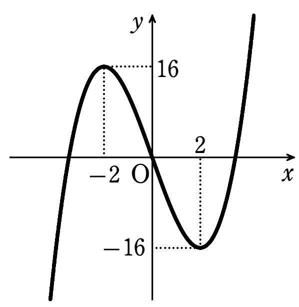
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 16	↘	極小 -16	↗

よって，y は　$x=-2$ で極大値 16，

$x=2$　で極小値 -16

をとる。

また，グラフは右の図のようになる。



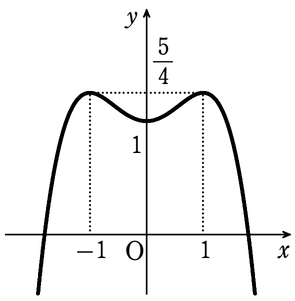
(2)　$y'=-x^3+x$

$=-x(x^2-1)=-x(x-1)(x+1)$

$y'=0$ とすると　$x=0$，± 1

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↗	極大 $\frac{5}{4}$	↘	極小 1	↗	極大 $\frac{5}{4}$	↘



よって，y は　　$x=\pm 1$ で極大値 $\frac{5}{4}$，

$x=0$　で極小値 1

をとる。

また，グラフは右の図のようになる。

[改訂版キートレーニングⅠⅡAB受 Get Ready389]

(1)　$y'=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

$y'=0$ とすると　　$x=-1,\ 2$

$-1\leqq x\leqq 4$ における y の増減表は右のようになる。

x	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{7}{6}$	↘	$-\frac{10}{3}$	↗	$\frac{16}{3}$

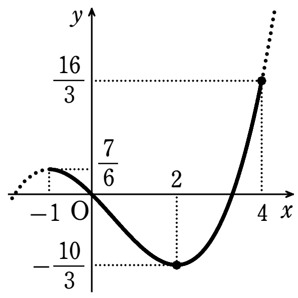
ここで　$\frac{7}{6}<\frac{16}{3}$

よって，

$x=4$ で最大値 $\frac{16}{3}$

$x=2$ で最小値 $-\frac{10}{3}$

をとる。



(2)　$y'=2x^3-8x^2+6x=2x(x^2-4x+3)=2x(x-1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ 1,\ 3$

$-1\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は右のようになる。

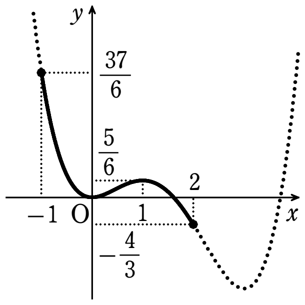
x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$\frac{37}{6}$	↘	0	↗	$\frac{5}{6}$	↘	$-\frac{4}{3}$

よって，

$x=-1$ で最大値 $\frac{37}{6}$，

$x=2$ で最小値 $-\frac{4}{3}$

をとる。



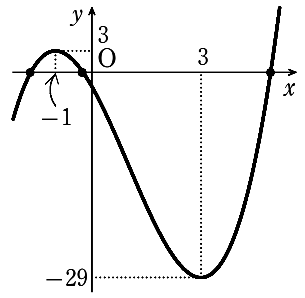
[改訂版キートレーニングⅠⅡAB受 Get Ready400]

(1)　$y=x^3-3x^2-9x-2$ とおくと　　$y'=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　　$x=-1,\ 3$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 3	↘	極小 -29	↗



ゆえに，この関数のグラフは右の図のようになり，グラフは x 軸と 3 点を共有する。

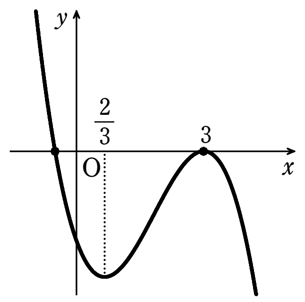
したがって，方程式 $x^3-3x^2-9x-2=0$ の異なる実数解は 3 個である。

(2)　$y=-2x^3+11x^2-12x-9$ とおくと　　$y'=-6x^2+22x-12=-2(3x-2)(x-3)$

$y'=0$ とすると　　$x=\frac{2}{3},\ 3$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小	↗	極大 0	↘



ゆえに，この関数のグラフは右の図のようになり，グラフは x 軸と 2 点を共有する。

したがって，方程式 $-2x^3+11x^2-12x-9=0$ の異なる実数解は 2 個である。

[改訂版キートレーニングⅠⅡAB受 Get Ready401]

$f(x)=x^3+3x^2-9x+6$ とおくと　　$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-3,\ 1$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	1	↗

よって，$x>0$ のとき $f(x)$ は $x=1$ で最小値 1 をとる。

ゆえに，$x>0$ のとき　　$f(x)\geqq 1>0$

したがって，$x>0$ のとき $x^3+3x^2-9x+6>0$ が成り立つ。

[改訂版キートレーニングⅠⅡAB受 Get Ready411]

(1)　(与式)$=\int(9x^2-4x)dx=3x^3-2x^2+C$　(C は積分定数)

(2)　(与式)$=\left[x^3-\frac{x^2}{2}+x\right]_1^3=\left(3^3-\frac{3^2}{2}+3\right)-\left(1^3-\frac{1^2}{2}+1\right)=24$

(3)　(与式)$=\int_{-1}^{1}(4x^3+5x)dx+\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx=0+2\int_0^1(-x^2+1)dx$

$=2\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=2\left(-\frac{1^3}{3}+1\right)=\frac{4}{3}$

(4)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき　　$|x^2-1|=-(x^2-1)$

$1\leqq x\leqq 2$ のとき　　$|x^2-1|=x^2-1$

よって　　(与式)$=\int_0^1\{-(x^2-1)\}dx+\int_1^2(x^2-1)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2$

$=-\left(\frac{1^3}{3}-1\right)+\left(\frac{2^3}{3}-2\right)-\left(\frac{1^3}{3}-1\right)=2$

[改訂版キートレーニングⅠⅡAB受 Get Ready412]

(1)　$\int_0^1 f(t)dt=a$ とおくと　　$f(x)=x^2-a$

よって　　$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(t^2-a)dt=\left[\frac{t^3}{3}-at\right]_0^1=\frac{1}{3}-a$

$\int_0^1 f(t)dt=a$ より　　$\frac{1}{3}-a=a$　　　ゆえに　　$a=\frac{1}{6}$

よって　　$f(x)=x^2-\frac{1}{6}$

(2)　両辺を x で微分すると　　$h(x)=2x+3$

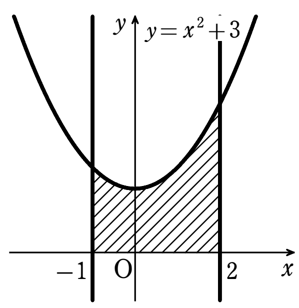
また，両辺に $x=1$ を代入すると　　$\int_1^1 h(t)dt=1^2+3\cdot 1+a$

よって　　$0=4+a$　　　ゆえに　　$a=-4$

[改訂版キートレーニングⅠⅡAB受 Get Ready424]

(1)　右の図から，求める面積は

$$\int_{-1}^{2}(x^2+3)dx=\left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_{-1}^{2}=12$$



(2)　$y=-x^2+2x+2$ と $y=2x+1$ の交点の x 座標は，方程式 $-x^2+2x+2=2x+1$ の解である。

$-x^2+2x+2=2x+1$ より　　$x^2-1=0$

よって　　$(x+1)(x-1)=0$

ゆえに　　$x=\pm 1$

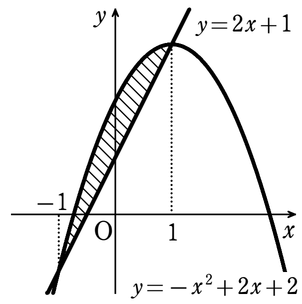
よって，右の図から，求める面積は

$$\int_{-1}^{1}\{(-x^2+2x+2)-(2x+1)\}dx$$

$$=-\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx$$

$$=-\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)dx$$

$$=\frac{1}{6}\{1-(-1)\}^3=\frac{4}{3}$$



(3)　$y=x^3+2x^2-3x$ と x 軸の交点の x 座標は，方程式 $x^3+2x^2-3x=0$ の解である。

$x^3+2x^2-3x=0$ より　　$x(x+3)(x-1)=0$

よって　　$x=0,\ -3,\ 1$

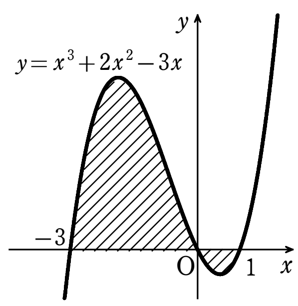
また，$y=x^3+2x^2-3x$ のグラフは右の図のようになり　　$-3\leqq x\leqq 0$ において　$y\geqq 0$

$0\leqq x\leqq 1$ において　$y\leqq 0$

ゆえに，求める面積は

$$\int_{-3}^{0}(x^3+2x^2-3x)dx+\int_0^1\{-(x^3+2x^2-3x)\}dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_0^1=\frac{71}{6}$$



(4)　$0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ のとき　　$y=|2x-1|=-(2x-1)$

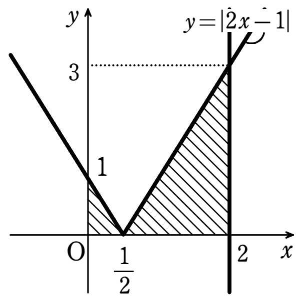
$\frac{1}{2}\leqq x\leqq 2$ のとき　　$y=|2x-1|=2x-1$

よって，求める面積は

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\{-(2x-1)\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2x-1)dx$$

$$=-\Big[x^2-x\Big]_0^{\frac{1}{2}}+\Big[x^2-x\Big]_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{5}{2}$$

別解　図より　$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot1+\frac{1}{2}\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)\cdot3=\frac{5}{2}$



[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready434]

放物線と直線の交点の x 座標は，

$x^2-(a+1)x+a=a(x-1)$ から

$x^2-(2a+1)x+2a=0$

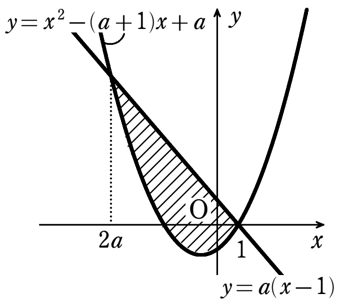
よって　$(x-2a)(x-1)=0$

ゆえに　$x=2a,\ 1$

$a<0$ より $2a<0$ であるから，放物線と直線で囲まれた図形の面積は

$$\int_{2a}^{1}[a(x-1)-\{x^2-(a+1)x+a\}]dx$$

$$=-\int_{2a}^{1}(x-2a)(x-1)dx=\frac{1}{6}(1-2a)^3$$



これが 36 と等しいから　$\frac{1}{6}(1-2a)^3=36$　　よって　$(1-2a)^3=6^3$

a は実数であるから　$1-2a=6$　　よって　$a=-\frac{5}{2}$

これは $a<0$ を満たす。

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready435]

(1)　右の図から

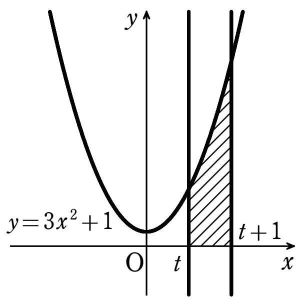
$$S(t)=\int_t^{t+1}(3x^2+1)dx=\Big[x^3+x\Big]_t^{t+1}$$

$$=\{(t+1)^3+(t+1)\}-(t^3+t)$$

$$=3t^2+3t+2$$

(2)　(1) より　$S(t)=3\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$

よって，$S(t)$ は $t=-\frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{5}{4}$ をとる。



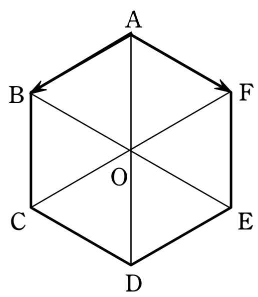
[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready443]

右の図のように点 O を定めると　$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$

(1)　$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF}$

(2)　$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF}$

(3)　$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}$



[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready444]

(1)　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とすると　$(3,\ -5)=s(1,\ 1)+t(-1,\ 1)$

よって　$(3,\ -5)=(s-t,\ s+t)$

ゆえに　$3=s-t,\ -5=s+t$　　したがって　$s=-1,\ t=-4$

よって　$\vec{p}=-\vec{a}-4\vec{b}$

(2)　$\vec{p}$ と $\vec{c}$ が平行のとき，$\vec{c}=k\vec{p}$ を満たす実数 k が存在する。

このとき　$(x,\ 3-2x)=k(3,\ -5)$　　よって　$(x,\ 3-2x)=(3k,\ -5k)$

ゆえに　$x=3k,\ 3-2x=-5k$　　したがって　$x=9,\ k=3$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready445]

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60^\circ=3\times2\times\frac{1}{2}=3$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times(-3)+(-1)\times6=-15$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

$|\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+6^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

よって　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-15}{\sqrt{10}\times3\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

したがって　$\theta=135^\circ$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready454]

(1)　点 M$(\vec{m})$，N$(\vec{n})$ とする。

点 M は辺 AB の中点であるから　$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

点 N は線分 CM を 2 : 1 に内分するから

$$\vec{n}=\frac{\vec{c}+2\vec{m}}{2+1}=\frac{1}{3}\left(\vec{c}+2\times\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

(2)　点 D$(\vec{d})$，G$(\vec{g})$ とする。

点 G は △ABC の重心であるから　$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

点 D は線分 BG を 2 : 3 に外分するから

$$\vec{d}=\frac{-3\vec{b}+2\vec{g}}{2-3}=-\left(-3\vec{b}+2\times\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{7}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready455]

求める直線上の点を P$(x,\ y)$ とする。

また，点 A，B，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とする。

(1)　$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$ であるから　$(x,\ y)=(-1,\ 2)+t(2,\ 3)$

よって　$(x,\ y)=(2t-1,\ 3t+2)$　　ゆえに　$x=2t-1,\ y=3t+2$

$x=2t-1$ より　$t=\frac{x+1}{2}$

これを $y=3t+2$ に代入すると　$y=3\times\frac{x+1}{2}+2$　　よって　$y=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$

(2)　$(\vec{p}-\vec{b})\cdot\vec{n}=0$ であるから　$(x-4)\times(-1)+(y-3)\times1=0$

よって　$-x+y+1=0$　　ゆえに　$y=x-1$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready465]

$$\overrightarrow{OD}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2},$$

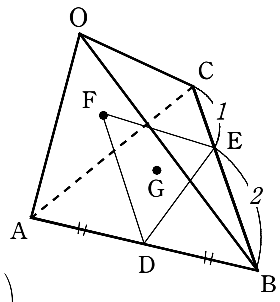
$$\overrightarrow{OE}=\frac{\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{2+1}=\frac{\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{3},$$

$$\overrightarrow{OF}=\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}}{3}$$

よって　$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}+\frac{\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{3}+\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}}{3}\right)$$

$$=\frac{5}{18}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{18}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$



[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready466]

求めるベクトルを $\vec{p}=(x,\ y,\ z)$ とする。

$\vec{p}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に垂直であるから　$\vec{p}\cdot\vec{a}=0,\ \vec{p}\cdot\vec{b}=0$

よって　$2x-z=0,\ x+3y-2z=0$　　したがって　$y=x,\ z=2x$

また，$|\vec{p}|=\sqrt{3}$ であるから　$|\vec{p}|^2=3$　　よって　$x^2+y^2+z^2=3$

$y=x,\ z=2x$ であるから　$x^2+x^2+(2x)^2=3$

よって　$6x^2=3$　　ゆえに　$x^2=\frac{1}{2}$

よって　$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　$y=\frac{1}{\sqrt{2}},\ z=\sqrt{2}$

$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　$y=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ z=-\sqrt{2}$

したがって，求めるベクトルは　$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}\right)$，$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\sqrt{2}\right)$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready467]

4 点 A，B，C，D が同一平面上にあるとき，$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ となる実数 s，t がある。

よって　$(x-1,\ 4,\ 5)=s(-1,\ 2,\ 0)+t(-1,\ 0,\ 3)$

ゆえに　$x-1=-s-t,\ 4=2s,\ 5=3t$

これを解いて　$s=2,\ t=\frac{5}{3},\ x=-\frac{8}{3}$

[改訂版キートレーニングⅠⅡＡＢ受 Get Ready476]

等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると　$a_n=a+(n-1)d$

$a_4=8$ であるから　$8=a+3d$

$a_7=17$ であるから　$17=a+6d$

これらより　$a=-1,\ d=3$

よって，求める数列の一般項は　$a_n=-1+(n-1)\cdot3=3n-4$

また，この数列の初項から第 100 項までの和は　$\frac{100}{2}\{2\cdot(-1)+99\cdot3\}=14750$

[改訂版キートレーニングⅠⅡAB受 Get Ready477]

等比数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公比を r とすると　$a_n=ar^{n-1}$

$a_4=-24$ であるから　$-24=ar^3$

$a_7=192$ であるから　$192=ar^6$

$ar^6=ar^3\cdot r^3$ であるから　$192=-24r^3$　よって　$r^3=-8$

r は実数であるから　$r=-2$　よって　$a=3$

したがって，求める数列の一般項は　$a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$

また，この数列の初項から第10項までの和は　$\dfrac{3\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)}=1-1024=-1023$

[改訂版キートレーニングⅠⅡAB受 Get Ready488]

(1)　(与式)$=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+4)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(2)　(与式)$=n\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=n\cdot\frac{2^n-1}{2-1}=n(2^n-1)$

(3)　(与式)$=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot 2k=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-2k)=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\dfrac{1}{3}n(n+1)\{2(2n+1)-3\}=\dfrac{1}{3}n(n+1)(4n-1)$

[改訂版キートレーニングⅠⅡAB受 Get Ready489]

(1)　この数列の階差数列は　1，3，5，7，9，……

よって，階差数列は初項1，公差2の等差数列であるから，階差数列の一般項は

$1+2(n-1)=2n-1$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=3+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=3+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)=n^2-2n+4$

この式に $n=1$ を代入すると，$a_1=3$ となるから，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，求める数列の一般項は　$a_n=n^2-2n+4$

(2)　この数列の階差数列は　-2，4，-8，16，-32，……

よって，階差数列は初項 -2，公比 -2 の等比数列であるから，階差数列の一般項は

$-2\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^n$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=-2+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-2)^k=-2+\frac{-2\{1-(-2)^{n-1}\}}{1-(-2)}$

$=-2-\dfrac{2}{3}\{1-(-2)^{n-1}\}=-\dfrac{8}{3}-\dfrac{(-2)^n}{3}$

この式に $n=1$ を代入すると $a_1=-\dfrac{8}{3}+\dfrac{2}{3}=-2$ であるから，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，求める数列の一般項は　$a_n=-\dfrac{8}{3}-\dfrac{(-2)^n}{3}$

[改訂版キートレーニングⅠⅡAB受 Get Ready490]

$a_1=S_1$ であるから　$a_1=2\cdot 1^2+3^1-1=4$

$n\geqq 2$ のとき，$a_n=S_n-S_{n-1}$ であるから

$a_n=2n^2+3^n-1-\{2(n-1)^2+3^{n-1}-1\}$

$=2n^2+3^n-1-(2n^2-4n+2+3^{n-1}-1)$

$=4n+3^{n-1}(3-1)-2=4n+2\cdot 3^{n-1}-2$

この式に $n=1$ を代入すると $a_1=4\cdot 1+2\cdot 1-2=4$ であるから，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，求める一般項は　$a_n=4n+2\cdot 3^{n-1}-2$

[改訂版キートレーニングⅠⅡAB受 Get Ready498]

(1)　漸化式から　$a_{n+1}-a_n=4$

よって，数列 $\{a_n\}$ は初項 -1，公差4の等差数列である。

ゆえに，求める一般項は　$a_n=-1+(n-1)\cdot 4=4n-5$

(2)　漸化式から，数列 $\{a_n\}$ は初項2，公比3の等比数列である。

ゆえに，求める一般項は　$a_n=2\cdot 3^{n-1}$

(3)　漸化式より　$a_{n+1}-a_n=n(n+1)$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=n(n+1)$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)$

$=1+\dfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\dfrac{1}{2}(n-1)n=1+\dfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1+3)$

$=1+\dfrac{1}{3}(n-1)n(n+1)=\dfrac{1}{3}(n^3-n+3)$

この式に $n=1$ を代入すると $a_1=\dfrac{1}{3}(1^3-1+3)=1$ であるから，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，求める一般項は　$a_n=\dfrac{1}{3}(n^3-n+3)$

(4)　漸化式を変形すると　$a_{n+1}-2=-2(a_n-2)$

よって，数列 $\{a_n-2\}$ は初項 $a_1-2=-2$，公比 -2 の等比数列である。

ゆえに　$a_n-2=-2\cdot(-2)^{n-1}$

よって，求める一般項は　$a_n=2+(-2)^n$

[改訂版キートレーニングⅠⅡAB受 Get Ready507]

(1)　$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$　……①　とする。

[1]　$n=1$ のとき

(左辺)$=1^3=1$，(右辺)$=\left\{\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\right\}^2=1$

よって，①は $n=1$ のとき成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき①が成り立つと仮定する。

すなわち　$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3=\left\{\dfrac{1}{2}k(k+1)\right\}^2$　…②

$n=k+1$ のとき，①の左辺について考えると，②から

$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3+(k+1)^3=\left\{\dfrac{1}{2}k(k+1)\right\}^2+(k+1)^3$

$=\dfrac{1}{4}(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}=\dfrac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$

$=\left[\dfrac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}\right]^2$

ゆえに，①は $n=k+1$ のときも成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n に対して等式①は成り立つ。

(2)　$2^n\geqq n+1$　……①とする。

[1]　$n=1$ のとき

(左辺)$=2^1=2$，(右辺)$=1+1=2$

よって，①は $n=1$ のとき成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき①が成り立つと仮定する。

すなわち　$2^k\geqq k+1$　……②

$n=k+1$ のとき，①の両辺の差を考えると，②から

$2^{k+1}-\{(k+1)+1\}\geqq 2(k+1)-k-2=k\geqq 0$

よって　$2^{k+1}\geqq(k+1)+1$

ゆえに，①は $n=k+1$ のときも成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n に対して不等式①は成り立つ。