考：p. 86

P74の内容を思い返してみよう。
「方程式の表す図形」とは方程式を満たす点の集まりのこと。
円を表す方程式(条件)はなんだろうか?

第2節　円

5　円の方程式

A　円の方程式

中心が C，半径が r の円は，CP$=r$ を満たす点 P 全体の集合である。

中心からの距離が同じ点の集まりである

だから

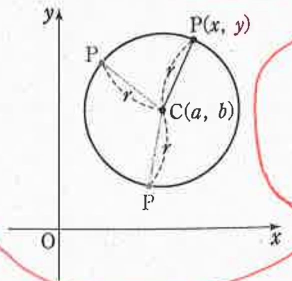
円の上の点P(x, y)はどこをとっても中心(a, b)から等距離

座標平面上で，中心 C の座標を $(a,\ b)$，点 P の座標を $(x,\ y)$ とし，条件 CP$=r$ を座標を用いて表すと，次のようになる。

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

すなわち　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

よって，次のことが成り立つ。



▶ 円の方程式

点 $(a,\ b)$ を中心とし，半径が r の円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

注意

特に，原点 O を中心とし，半径が r の円の方程式は　$x^2+y^2=r^2$

例 10　知　中心が点 $(1,\ -3)$，半径が 2 の円の方程式は

$$(x-1)^2+\{y-(-3)\}^2=2^2$$

すなわち　$(x-1)^2+(y+3)^2=4$　終

知　**練習 20**　次のような円の方程式を求めよ。

(1)　中心が原点，半径が 3　　(1)　$x^2+y^2=9$

(2)　中心が点 $(-2,\ 3)$，半径が $\sqrt{5}$　　(2)　$(x+2)^2+(y-3)^2=5$

知　**練習 21**　円 $(x+3)^2+(y-2)^2=3$ の中心と半径を求めよ。　**中心は点 $(-3,\ 2)$，半径は $\sqrt{3}$**

解説　ここでは，円を「定点（中心）からの距離が一定（半径の大きさ）であるような点の集合」と定義しているので，円は実は円周を意味している。しかし，円の面積などというときは「円周で囲まれた図形」すなわち円板を意味する。普通，円周のことも円板のことも単に円ということが多いので，「円」とあるときは，どちらを意味するかを文章の前後関係から判断する。

解説　円の中心と半径が求められれば，公式によりその円の方程式が得られる。

知　**例題 5**　次のような円の方程式を求めよ。

(1)　点 $(4,\ 3)$ を中心とし，原点を通る

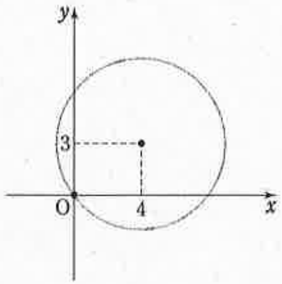
(2)　2 点 $(-2,\ -1)$，$(2,\ 3)$ を直径の両端とする

解　(1)　半径を r とすると，r は中心 $(4,\ 3)$ と原点 $(0,\ 0)$ の距離であるから

$$r^2=(0-4)^2+(0-3)^2$$
$$=25$$

よって，求める円の方程式は

$$(x-4)^2+(y-3)^2=25$$



(2)　中心は 2 点 $(-2,\ -1)$，$(2,\ 3)$ を結ぶ線分の中点であり，その座標は

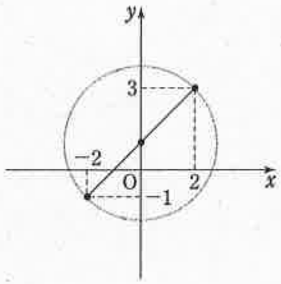
$$\left(\frac{-2+2}{2},\ \frac{-1+3}{2}\right)$$

すなわち　$(0,\ 1)$

半径を r とすると，r は中心 $(0,\ 1)$ と点 $(2,\ 3)$ の距離であるから

$$r^2=(2-0)^2+(3-1)^2=8$$

よって，求める円の方程式は　$x^2+(y-1)^2=8$



【補足】　例題 5 (1) では，求める円の方程式を $(x-4)^2+(y-3)^2=r^2$ として，この方程式に $x=0$，$y=0$ を代入してもよい。

知　**練習 22**　次のような円の方程式を求めよ。

(1)　点 $(-1,\ 2)$ を中心とし，点 $(2,\ 3)$ を通る　　(1)　$(x+1)^2+(y-2)^2=10$

(2)　2 点 $(2,\ 2)$，$(0,\ -6)$ を直径の両端とする　　(2)　$(x-1)^2+(y+2)^2=17$

解説　実際には，半径 r ではなく r^2 がわかればよく，そのため数 l. 7 では「$r^2=\cdots$」と書き出している。これは 2 点間の距離の公式そのものではなく，その両辺を 2 乗した形を使っている。生徒にそのことを補足しておくとよい。また，わざわざ

$r^2=25$ から　$r=\sqrt{25}=5$

としなくてもよいことを伝えておくとよい。

解説　数学Ⅰで学習した平方完成，数学Ⅱの第1章で学習した実数の性質の知識が必要となる。適宜，復習しながら指導したい。

考：p. 88

B　$x^2+y^2+lx+my+n=0$ の表す図形

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ だけが円の方程式ではない

円の方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を変形すると，次のようになる。

展開すると

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

一般に，円の方程式は l，m，n を定数として，次の形に表される。

計算すると

$$x^2+y^2+lx+my+n=0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

逆に，① の形の方程式がどのような図形を表すか調べてみよう。

技 知 **例 11**　方程式 $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ の表す図形

これも円の方程式

平方完成

この方程式を変形すると

$(x^2+2x)+(y^2-4y)=20$

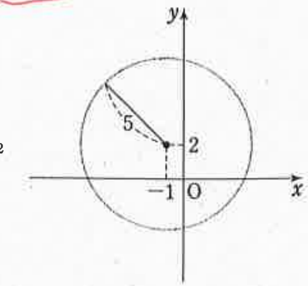
$(x^2+2x+1^2)+(y^2-4y+2^2)$

$=20+1^2+2^2$

すなわち　$(x+1)^2+(y-2)^2=5^2$

これは，点 $(-1,\ 2)$ を中心とし，

半径が 5 の円を表す。　終



技 知 **練習 23**　次の方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$x^2+y^2-2x+4y-11=0$　　(2)　$x^2+y^2+6x-8y+16=0$

(1)　点 $(1,\ -2)$ を中心とし，半径が 4 の円　　(2)　点 $(-3,\ 4)$ を中心とし，半径が 3 の円

一般に，方程式 ① は，$(x-a)^2+(y-b)^2=k$ の形に変形できて

$k>0$ ならば，中心が点 $(a,\ b)$，半径が $\sqrt{k}$ の円

$k=0$ ならば，点 $(a,\ b)$

を表す。また，$k<0$ ならば，方程式 ① が表す図形はない。

関 技 知 **問 3**　次の方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$x^2+y^2+2x-4y+5=0$　　(2)　$x^2+y^2+2x-4y+6=0$

(1)　点 $(-1,\ 2)$　　(2)　方程式が表す図形はない。

関 技 知 **練習 24**　次の方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$x^2+y^2-6x+4y+13=0$　　(2)　$x^2+y^2+4x+8y+21=0$

(1)　点 $(3,\ -2)$　　(2)　方程式が表す図形はない

解説　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の形の方程式を円の方程式の標準形（基本形），$x^2+y^2+lx+my+n=0$ の形の方程式を円の方程式の一般形と呼ぶことがある。円の方程式の一般形は，x^2 と y^2 の項の係数が等しく，xy の項がないことを強調する。

考 技 知 **例題 6**　3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 7)$，$\mathrm{B}(2,\ -2)$，$\mathrm{C}(6,\ 0)$ を通る円の方程式を求めよ。

解説　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を用いると計算が複雑になるので，この形の円の方程式はこの種の問題では用いない方がよい。

試しにやってみよう

解　求める円の方程式を

$$x^2+y^2+lx+my+n=0$$

とすると，この円が，$\mathrm{A}(-1,\ 7)$ を通るから

$$(-1)^2+7^2-l+7m+n=0$$

$\mathrm{B}(2,\ -2)$ を通るから

$$2^2+(-2)^2+2l-2m+n=0$$

$\mathrm{C}(6,\ 0)$ を通るから

$$6^2+0^2+6l+0m+n=0$$

これらを整理すると

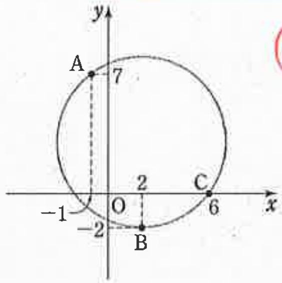
$$l-7m-n=50,\ 2l-2m+n=-8,\ 6l+n=-36$$

これを解いて

$$l=-4,\ m=-6,\ n=-12$$

よって，求める円の方程式は

$$x^2+y^2-4x-6y-12=0$$



例題 6 で求めた円は，3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 7)$，$\mathrm{B}(2,\ -2)$，$\mathrm{C}(6,\ 0)$ を頂点とする △ABC の外接円である。その方程式は

$$(x-2)^2+(y-3)^2=5^2$$

と変形されるから，点 $(2,\ 3)$ は △ABC の外接円の中心，すなわち外心である。

考 技 知 **練習 25**　3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 1)$，$\mathrm{C}(3,\ -2)$ がある。

(1)　3 点 A，B，C を通る円の方程式を求めよ。

(2)　△ABC の外心の座標と，外接円の半径を求めよ。

(1)　$x^2+y^2-2x+2y-3=0$

(2)　外心の座標は $(1,\ -1)$，外接円の半径は $\sqrt{5}$ である。

第3章　図形と方程式

関：p. 90～93

6 円と直線

A 円と直線の共有点

円と直線が共有点をもつとき，その共有点の座標は，それらの図形の方程式を連立させた連立方程式の実数解として得られる。

例題 7 知 円 $x^2+y^2=5$ と次の直線の共有点の座標を求めよ。

(1) $y=x-1$　　(2) $2x-y+5=0$

解 (1) $\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ① \\ y=x-1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

②を①に代入して整理すると

$x^2-x-2=0$

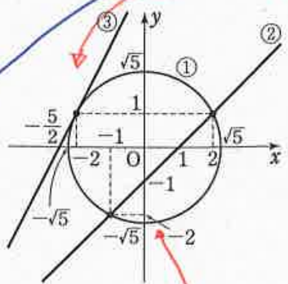
これを解いて $x=-1,\ 2$

②に代入して

$x=-1$ のとき $y=-2$

$x=2$ のとき $y=1$

よって，共有点の座標は $(-1,\ -2),\ (2,\ 1)$



接している

(2) $\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ① \\ 2x-y+5=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

③から $y=2x+5$ …… ④

④を①に代入して整理すると

$x^2+4x+4=0$

これを解いて $x=-2$　④に代入して $y=1$

よって，共有点の座標は $(-2,\ 1)$

知 **練習 26** 次の円と直線の共有点の座標を求めよ。

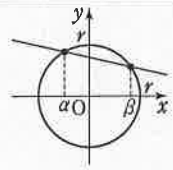
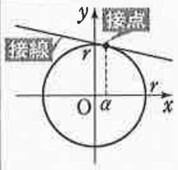
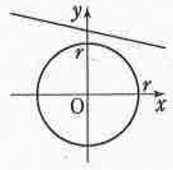
(1) $x^2+y^2=25,\ y=x+1$　　(2) $x^2+y^2=2,\ x+y=2$

(1) $(-4,\ -3),\ (3,\ 4)$　　(2) $(1,\ 1)$

B 円と直線の位置関係

円の方程式 $x^2+y^2=r^2$ と直線の方程式 $lx+my+n=0$ から，例えば y を消去して得られる x の2次方程式を $ax^2+bx+c=0$ とすると，この2次方程式の実数解の個数と，円と直線の共有点の個数は一致する。

よって，この2次方程式の判別式を D とすると，円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $lx+my+n=0$ の位置関係は，次の表のようにまとめられる。

Dの符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	異なる2つの実数解 $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$	重解 $x=\alpha$	実数解はない
円と直線の位置関係			
共有点の個数	2個	1個	0個

一般に，円と直線の位置関係について，次のことがいえる。

▶ 円と直線の位置関係 I

円の方程式と直線の方程式から y を消去して x の2次方程式が得られるとき，その判別式を D とすると

$D>0 \iff$ 異なる2点で交わる

$D=0 \iff$ 接する

$D<0 \iff$ 共有点をもたない

考 **練習 27** 次の円と直線の共有点の個数を求めよ。

(1) $x^2+y^2=4,\ y=x+1$　　(2) $x^2+y^2=1,\ y=-2x+3$

(3) $x^2+y^2=10,\ 3x+y-10=0$　　(1) 2個　(2) 0個　(3) 1個

解説 円の接線，接点の定義は中学校で既習である。円と直線の位置関係は，2点で交わる，接する，共有点をもたないの3つの場合があることを，数学Aで学んでいる。

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ において，その判別式を $D=b^2-4ac$ とすると，この2次方程式が

異なる2つの実数解をもつ $\iff D>0$

ただ1つの解(重解)をもつ $\iff D=0$

実数解をもたない $\iff D<0$

が成り立つことを数学Iで学んでいる。

第3章 図形と方程式

解説 円と直線の共有点の問題は，y（あるいは x）を消去した 2 次方程式の実数解の問題に読み替えて考えることを，しっかり理解させたい。

考 **応用例題 3** 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=x+k$ が異なる 2 点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

解 連立方程式

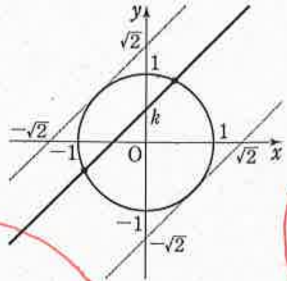
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots ① \\ y=x+k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

において，② を ① に代入して整理すると

$$2x^2+2kx+k^2-1=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-1)=-k^2+2$$



$D=b^2-4ac$

$D/4=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$

円と直線が異なる 2 点で交わるための必要十分条件は，

$$D>0$$

であるから　$-k^2+2>0$

この不等式を解いて　$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

考 **問 4** 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=x+k$ について，次の問いに答えよ。

(1) 円と直線が接するとき，定数 k の値と接点の座標を求めよ。

(2) 円と直線が共有点をもたないとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

考 **練習 28** 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=2x+k$ について，次の問いに答えよ。

(1) 円と直線が共有点をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) 円と直線が接するとき，定数 k の値と接点の座標を求めよ。

問 4　$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-1)=-k^2+2$

(1) $D=0$ から　$k=\pm\sqrt{2}$

$k=\sqrt{2}$ のとき　$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$k=-\sqrt{2}$ のとき　$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(2) $D<0$ から　$k<-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}<k$

練習 28 (1) $-5\leqq k\leqq 5$

(2) 接するときの k の値と接点の座標は

$k=5$ のとき　$(-2, 1)$

$k=-5$ のとき　$(2, -1)$

考 知：p. 93

解説 目的に応じた解法の使い分けが有効であることを指導したい。

(i) 共有点の座標が必要な場合は 2 次方程式を作り，判別式を用いる（練習 28）

(ii) 位置関係のみの場合は円の中心と直線の距離と半径の大小関係を用いる（練習 29）

円と直線の位置関係について，下の図から，更に次のことがわかる。

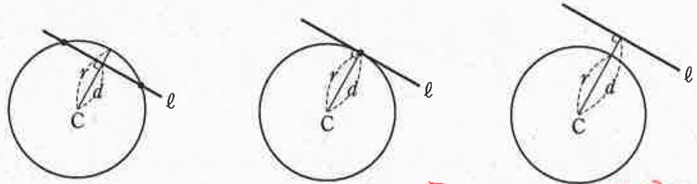
▶ 円と直線の位置関係 II

半径 r の円の中心 C と直線 ℓ の距離を d とする。

$d<r \iff$ 異なる 2 点で交わる

$d=r \iff$ 接する

$d>r \iff$ 共有点をもたない



図で考えると視覚的で分かりやすい

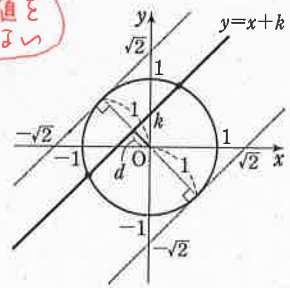
このことを用いて，前ページの応用例題 3 を解いてみよう。

円 $x^2+y^2=1$ の中心は原点で，半径 r は 1 である。

原点と直線 $x-y+k=0$ の距離 d は

絶対値を忘れない

$$d=\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$



円と直線が異なる 2 点で交わるための必要十分条件は，$d<r$ であるから

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<1$$

ゆえに　$|k|<\sqrt{2}$　すなわち　$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

知 **練習 29** 円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=2x+k$ の共有点の個数は，定数 k の値によって，どのように変わるか。

$-2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$ のとき　2 個

$k=\pm2\sqrt{5}$ のとき　1 個

$k<-2\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}<k$ のとき　0 個

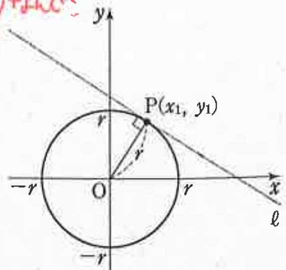
C 円の接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ におけるこの円の接線 ℓ の方程式を求めてみよう。 なんで、この場合分け ほしい

(i) Pは座標軸上にないとする。このとき，$x_1 \neq 0$，$y_1 \neq 0$ である。

右の図で，直線 OP の傾きは $\dfrac{y_1}{x_1}$ である。 なんで？

接線 ℓ は OP に垂直であるから，ℓ の傾きは $-\dfrac{x_1}{y_1}$ である。



よって，ℓ の方程式は

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

分母を払って，整理すると　$x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2$

点 $(x_1,\ y_1)$ は円周上にあるから　$x_1^2+y_1^2=r^2$

よって，求める接線の方程式は，次のようになる。

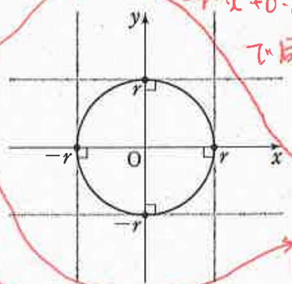
$$x_1x+y_1y=r^2 \quad \cdots\cdots ①$$

(ii) Pが x 軸上にあるとき，接線の方程式は

$$x=r \quad \text{または} \quad x=-r$$

(iii) Pが y 軸上にあるとき，接線の方程式は

$$y=r \quad \text{または} \quad y=-r$$



ゆえに，Pが座標軸上にある場合の接線の方程式も ① で表される。

したがって，次のことが成り立つ。

①に $(r,0)$、$(-r,0)$ を代入しても、
$rx+0y=r^2$ ∴ $x=r$
$-rx+0\cdot y=r^2$ ∴ $x=-r$
で同じ形の①の式が この場合でも 成り立つ

同様にして ①が成り立つ

▶ 円の接線

注意

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ におけるこの円の接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=r^2$$

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$ における この円の接線の方程式は，

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

知 例 12 円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(4,\ -3)$ における接線の方程式は

$4x+(-3)y=25$　　すなわち　　$4x-3y=25$　　終

知 練習 30 次の円の，円上の点 P における接線の方程式を求めよ。

(1) $x^2+y^2=20$，$\mathrm{P}(-2,\ 4)$　　(2) $x^2+y^2=9$，$\mathrm{P}(-2,\ -\sqrt{5})$

(1) $x-2y=-10$　　(2) $2x+\sqrt{5}y=-9$

次に，円外の点から円に引いた接線の方程式について考えよう。

円上にない

知 応用例題 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 3)$ を通り，円 $x^2+y^2=5$ に接する直線の方程式を求めよ。

〈解説〉円 $x^2+y^2=5$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ におけるこの円の接線が，点 $\mathrm{A}(1,\ 3)$ を通るように，x_1 と y_1 を定める。

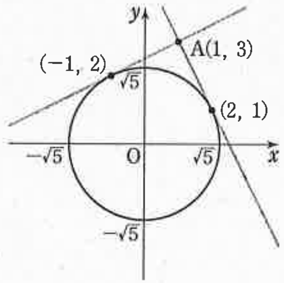
自分で接点を設定する

解 接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とすると

$$x_1^2+y_1^2=5 \quad \cdots\cdots ①$$

また，点 P におけるこの円の接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=5 \quad \cdots\cdots ②$$



この直線が点 A を通るから

$$x_1+3y_1=5 \quad \cdots\cdots ③$$

①，③ から x_1 を消去して整理すると

$y_1^2-3y_1+2=0$　　　ゆえに　$y_1=1,\ 2$

③ から　$y_1=1$ のとき $x_1=2$，　$y_1=2$ のとき $x_1=-1$

よって，接線の方程式 ② は，次のようになる。

$$2x+y=5,\quad -x+2y=5$$

知 練習 31 点 $\mathrm{A}(-3,\ 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=1$ に接する直線の方程式と，接点の座標を求めよ。

$\begin{cases} \text{接線 } y=1 \\ \text{接点 } (0,\ 1) \end{cases}$　$\begin{cases} \text{接線 } 3x+4y+5=0 \\ \text{接点 } \left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right) \end{cases}$

第3章 図形と方程式

考：*p.* 96

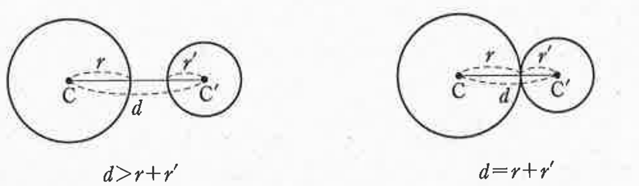
7 2つの円

A 2つの円の位置関係

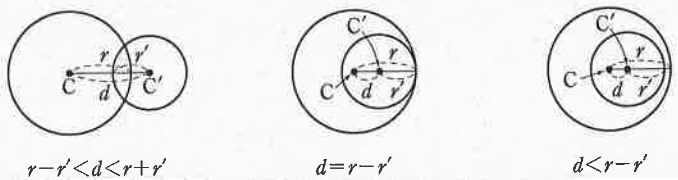
半径がそれぞれ r，r' である2つの円の中心 C，C′ の間の距離を d とする。ただし，$r>r'$ であるとする。このとき，2つの円 C，C′ の位置関係と d，r，r' の関係式は，次のようになる。

解説 一直線上にない3点を通る円はただ1つ定まるから，2つの円は3点以上を共有することはない（3点以上を共有する2円は全く重なり合う）。よって，2つの円の位置関係は，教科書で示されている5通りの場合となる。

[1] 互いに外部にある　　[2] 外接する（1点を共有する）



[3] 2点で交わる　　[4] 内接する（1点を共有する）　　[5] 一方が他方の内部にある



[2]，[4] のように，2つの円がただ1つの共有点をもつとき，この2つの円は **接する** といい，この共有点を **接点** という。

また，[2] のように接する場合，2つの円は **外接** するといい，[4] のように接する場合，2つの円は **内接** するという。

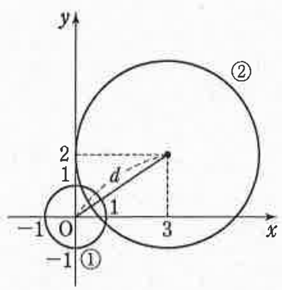
「円が接する」には2種類あることを頭に入れておく

【注意】 [1]～[3] の位置関係と d，r，r' の関係式は，$r=r'$ の場合も成り立つ。

知 **例13** 次の2つの円①，②の位置関係を調べる。

$x^2+y^2=1$ …… ①

$(x-3)^2+(y-2)^2=9$ …… ②



円①は中心が原点，半径が1の円である。また，円②は中心が点 (3, 2)，半径が3の円である。

2つの円の中心間の距離 d は

$$d=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

$3-1<d<3+1$ であるから，2つの円①，②は2点で交わる。 終

知 **練習32** 円 $x^2+y^2=4$ と次の円の位置関係を調べよ。

(1) $(x-4)^2+(y+3)^2=9$　　(2) $(x+3)^2+(y-3)^2=8$

(1) **外接する**　　(2) **2点で交わる**

技 知 **例題8** 中心が点 (4, 3) である円 C と，円 $x^2+y^2=1$ が外接するとき，円 C の方程式を求めよ。

解 円 $x^2+y^2=1$ は，中心が原点，半径が1の円である。

2つの円の中心間の距離は

$$\sqrt{4^2+3^2}=5$$

2つの円が外接するとき，円 C の半径を r とすると

$$5=r+1$$

ゆえに　$r=5-1=4$

よって，円 C の方程式は

$$(x-4)^2+(y-3)^2=16$$

技 知 **練習33** 中心が点 (4, 2) である円 C と，円 $x^2+y^2=5$ が内接するとき，円 C の方程式を求めよ。

$(x-4)^2+(y-2)^2=45$

解説 内接・外接の2通りが考えられる例を，教 *p.* 100 問題14で扱っているので，適宜補充されたい。

B 2つの円の共有点

2つの円が共有点をもつとき，その共有点の座標は，2つの円の方程式を連立させた連立方程式の実数解として得られる。

関 知 **応用例題 5** 次の2つの円の共有点の座標を求めよ。

$$x^2+y^2=5,\quad x^2+y^2-6x-2y+5=0$$

〈解説〉 $x^2+y^2=5$ と $x^2+y^2-6x-2y+5=0$ の辺々を引いて2次の項を消去すると，x，y の1次方程式が得られる。

連立方程式として解けばよいが，ウルテクニックがいる

解
$$\begin{cases} x^2+y^2-5=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2-6x-2y+5=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①−② から

まずは 2乗の項を消す

$$6x+2y-10=0$$

よって

代入する

$$y=-3x+5 \quad \cdots\cdots ③$$

③を①に代入して整理すると

$$x^2-3x+2=0$$

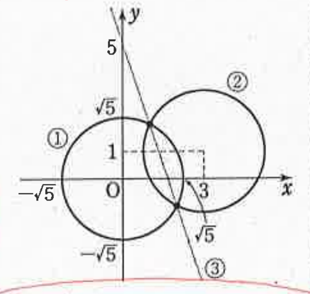
これを解いて

$$x=1,\ 2$$

③に代入して

$x=1$ のとき $y=2$，　$x=2$ のとき $y=-1$

よって，共有点の座標は　$(1,\ 2)$，$(2,\ -1)$



式の途中にでてきた，この直線。実はヒミツが！

【補足】 応用例題5の③の方程式は，2つの円の共有点を通る直線を表す。

解説 共有点の座標 $(1,\ 2)$，$(2,\ -1)$ は，①，②から導かれた x，y の方程式③を満たすから，③は2つの円の共有点を通る直線の方程式である。このことを押さえておく。

関 知 **練習 34** 次の2つの円の共有点の座標を求めよ。

$x^2+y^2=10,\quad x^2+y^2-2x-y-5=0$　$(1,\ 3)$，$(3,\ -1)$

関 技 知 **応用例題 6** 2つの円

$$x^2+y^2=5 \quad \cdots\cdots ①$$
$$x^2+y^2-6x-2y+5=0 \quad \cdots\cdots ②$$

解説 応用例題6では2つの円①，②は交わることを前提としているが，このことは重要である。

の交点A，Bと点 $(0,\ 3)$ を通る円の中心と半径を求めよ。

重要

P80と同じ考え方

〈解説〉 k を定数として，方程式

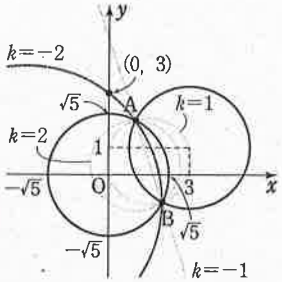
$$k(x^2+y^2-5)+(x^2+y^2-6x-2y+5)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

を考えると，③は，連立方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2-5=0 \\ x^2+y^2-6x-2y+5=0 \end{cases}$$

の解に対して常に成り立つ。

よって，k がどのような値をとっても，③は2つの円①，②の交点A，Bを通る図形を表す。



解 k を定数として

$$k(x^2+y^2-5)+(x^2+y^2-6x-2y+5)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

とすると，③は2つの円①，②の交点A，Bを通る図形を表す。③が点 $(0,\ 3)$ を通るとすると，③に $x=0$，$y=3$ を代入して　$4k+8=0$　ゆえに　$k=-2$

これを③に代入して整理すると

$$x^2+y^2+6x+2y-15=0$$

すなわち　$(x+3)^2+(y+1)^2=5^2$

よって，求める円の中心は点 $(-3,\ -1)$，半径は5である。

【補足】 応用例題6の③において，$k=-1$ とおいて得られる方程式は，2つの円の交点A，Bを通る直線を表す。

解説 2円の交点を実際に求め，3点を通る円の方程式として求めることもできる。

関 技 知 **練習 35** 2つの円 $x^2+y^2-4=0$，$x^2+y^2-4x+2y-6=0$ の2つの交点と点 $(1,\ 2)$ を通る円の中心と半径を求めよ。 中心は点 $\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$，半径は $\frac{5}{2}$

第3章 図形と方程式