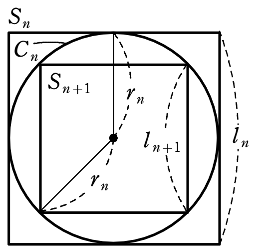
漸化式と極限２～高次導関数までの答え

1 C_n の半径を r_n とおく。



(1)　C_n の半径 r_n は，l_n の半分であるから　$r_n=\dfrac{1}{2}l_n$

(2)　C_n の直径は，l_{n+1} の $\sqrt{2}$ 倍である。

よって　$r_n=\dfrac{\sqrt{2}}{2}l_{n+1}$

ゆえに，(1) から　$\dfrac{1}{2}l_n=\dfrac{\sqrt{2}}{2}l_{n+1}$

すなわち　$l_{n+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}l_n$

したがって，数列 $\{l_n\}$ は初項 $l_1=1$，公比 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の等比数列であるから

$$l_n=1\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

(3)　(1)，(2) から　$a_n=l_n{}^2-\pi r_n{}^2=l_n{}^2-\pi\left(\dfrac{1}{2}l_n\right)^2=\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)l_n{}^2$

$$=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right\}^2=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は初項 $a_1=1-\dfrac{\pi}{4}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の無限等比級数である。

$\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$ であるから，その和は　$\dfrac{1-\dfrac{\pi}{4}}{1-\dfrac{1}{2}}=2-\dfrac{\pi}{2}$

2

$$\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{3-2\sqrt{2}}{3^2-(2\sqrt{2})^2}=3-2\sqrt{2}$$

よって　$a_n+b_n\sqrt{2}=(3-2\sqrt{2})^n$　……①

(1)　① において，$n=2$ のとき　$a_2+b_2\sqrt{2}=(3-2\sqrt{2})^2=17-12\sqrt{2}$

a_2，b_2 は整数であるから　$a_2=17$

(2)　① から　$a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}=(3-2\sqrt{2})^{n+1}=(3-2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^n$

$$=(3-2\sqrt{2})(a_n+b_n\sqrt{2})=(3a_n-4b_n)+(-2a_n+3b_n)\sqrt{2}$$

a_{n+1}，b_{n+1}，$3a_n-4b_n$，$-2a_n+3b_n$ はいずれも整数であるから

$$a_{n+1}=3a_n-4b_n,\quad b_{n+1}=-2a_n+3b_n$$

(3)　(2) から　$a_{n+1}-b_{n+1}\sqrt{2}=(3a_n-4b_n)-(-2a_n+3b_n)\sqrt{2}$

$$=3a_n-4b_n+2a_n\sqrt{2}-3b_n\sqrt{2}$$
$$=3(a_n-b_n\sqrt{2})+2\sqrt{2}(a_n-b_n\sqrt{2})$$
$$=(3+2\sqrt{2})(a_n-b_n\sqrt{2})$$

① から　$a_1=3$，$b_1=-2$

よって，数列 $\{a_n-b_n\sqrt{2}\}$ は初項 $a_1-b_1\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$，公比 $3+2\sqrt{2}$ の等比数列で

あるから　$a_n-b_n\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})\cdot(3+2\sqrt{2})^{n-1}=(3+2\sqrt{2})^n$　……②

(4)　(①＋②)÷2 から　$a_n=\dfrac{1}{2}\{(3-2\sqrt{2})^n+(3+2\sqrt{2})^n\}$

(①－②)÷$2\sqrt{2}$ から　$b_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\{(3-2\sqrt{2})^n-(3+2\sqrt{2})^n\}$

ゆえに

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\dfrac{1}{2}\{(3-2\sqrt{2})^n+(3+2\sqrt{2})^n\}}{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\{(3-2\sqrt{2})^n-(3+2\sqrt{2})^n\}}=\sqrt{2}\cdot\frac{(3-2\sqrt{2})^n+(3+2\sqrt{2})^n}{(3-2\sqrt{2})^n-(3+2\sqrt{2})^n}$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{\left(\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\right)^n+1}{\left(\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\right)^n-1}$$

$0<3-2\sqrt{2}<3+2\sqrt{2}$ から　$0<\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}<1$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=-\sqrt{2}$

3 (1)　T_{n+1} が奇数となるのは，次の [1]，[2] のいずれかの場合である。

[1]　T_n が奇数で，A_{n+1} が偶数である

[2]　T_n が偶数で，A_{n+1} が奇数である

[1]，[2] は互いに排反であるから，T_{n+1} が奇数となる確率 p_{n+1} は

$$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{2}{5}+(1-p_n)\cdot\frac{3}{5}=-\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}$$

(2)　(1) から　$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{5}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$

よって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は，初項 $p_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{10}$，公比 $-\dfrac{1}{5}$ の等比数列である

から　$p_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{10}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$

ゆえに　$p_n=\dfrac{1}{10}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{2}$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$

漸化式と極限２～高次導関数までの答え

4 (与式)$=\lim_{\theta\to0}\dfrac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to0}\dfrac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to0}\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\dfrac{1}{1+\cos\theta}$

$=1^2\cdot\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

5 $\dfrac{\sin(2\cos x)}{x-\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\sin(2\cos x)}{2\cos x}\cdot\dfrac{2\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=-\dfrac{\sin(2\cos x)}{2\cos x}\cdot\dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x}$

$x\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$ のとき $2\cos x\longrightarrow0$，$\dfrac{\pi}{2}-x\longrightarrow0$ であるから

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2\cos x)}{x-\frac{\pi}{2}}=-1\cdot2=-2$$

6 $m(a)$ は曲線 $y=x^2$ と $y=a\sin x$ の原点以外の交点の x 座標であるから

$\{m(a)\}^2=a\sin m(a)$ …… ①

$-1\leqq\sin m(a)\leqq1$ より，$a\sin m(a)\leqq a$ であるから　$0<\{m(a)\}^2\leqq a$

$\lim_{a\to+0}a=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\lim_{a\to+0}\{m(a)\}^2=0$

よって　$\lim_{a\to+0}m(a)=0$ …… ②

$m(a)\neq0$ に注意して，① から　$\dfrac{m(a)}{a}=\dfrac{\sin m(a)}{m(a)}$

② から　$\lim_{a\to+0}\dfrac{m(a)}{a}=\lim_{m(a)\to0}\dfrac{\sin m(a)}{m(a)}=1$

7

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(a\sin x+\cos x)=a,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}(x-\pi)=-\frac{\pi}{2}$

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ が存在するとき　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)$

よって　$a=-\dfrac{\pi}{2}$

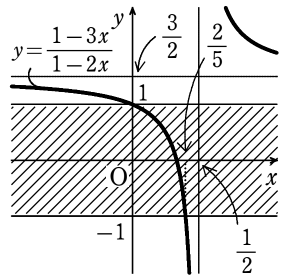
このとき　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=-\frac{\pi}{2},\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\cdot 1+0=a=-\frac{\pi}{2}$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ を満たすから連続であり　$a=-\dfrac{\pi}{2}$

8

(1)　数列 $\{S_n(x)\}$ が収束することは，初項 x，公比 $\dfrac{1-3x}{1-2x}$ の無限等比級数が収束することと同じであり，その条件は　$x=0$　または　$-1<\dfrac{1-3x}{1-2x}<1$　……①

$\dfrac{1-3x}{1-2x}=\dfrac{1}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)}+\dfrac{3}{2}$ であるから，不等式①の解は，右の図より　$0<x<\dfrac{2}{5}$



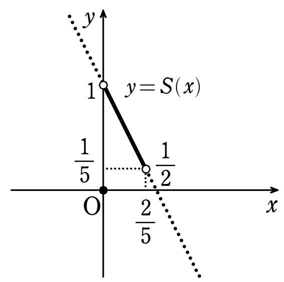
よって，求める x の値の範囲は　$0\leqq x<\dfrac{2}{5}$

(2)　$0<x<\dfrac{2}{5}$ のとき

$$S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)=\frac{x}{1-\frac{1-3x}{1-2x}}=1-2x$$

$x=0$ のとき　$\displaystyle S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)=0$

関数 $S(x)$ の定義域は $0\leqq x<\dfrac{2}{5}$ で，$y=S(x)$ のグラフは右の図のようになる。



(3)　(2) より，$S(x)$ は $0<x<\dfrac{2}{5}$ で連続，$x=0$ で不連続である。

9

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{x+2\sin(a^2x)}{\sin(ax)}=\lim_{x\to+0}\left\{\frac{x}{\sin(ax)}+\frac{2\sin(a^2x)}{\sin(ax)}\right\}$

$$=\lim_{x\to+0}\left\{\frac{ax}{a\sin(ax)}+2a\cdot\frac{ax}{\sin(ax)}\cdot\frac{\sin(a^2x)}{a^2x}\right\}=\frac{1}{a}+2a$$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to-0} f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{\sqrt{x+b}-c}{x}$

$x\to-0$ のとき，(分母)$\to 0$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to-0} f(x)$ が存在するのは，

$\displaystyle\lim_{x\to-0}(\sqrt{x+b}-c)=0$　すなわち　$c=\sqrt{b}$ のときである。

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to-0} f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{\sqrt{x+b}-\sqrt{b}}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{(x+b)-b}{x(\sqrt{x+b}+\sqrt{b})}$

$$=\lim_{x\to-0}\frac{1}{\sqrt{x+b}+\sqrt{b}}=\frac{1}{2\sqrt{b}}$$

(3)　$x=0$ における極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ が存在するための条件は　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to-0} f(x)$

よって，(1)，(2) より　$c=\sqrt{b}$　かつ　$\dfrac{1}{a}+2a=\dfrac{1}{2\sqrt{b}}$　……①

また，$f(x)$ が $x=0$ において連続になるための条件は　$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

よって　$f(0)=\dfrac{1}{2\sqrt{b}}$　……②

$b=\dfrac{1}{32}$ のとき，$f(x)$ が $x=0$ で連続になるためには，① から　$\dfrac{1}{a}+2a=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}$

すなわち　$2a^2-2\sqrt{2}\,a+1=0$　　よって　$(\sqrt{2}\,a-1)^2=0$

ゆえに　$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　これは，$a>0$ を満たす。

また，② から　$f(0)=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

次に $b>\dfrac{1}{32}$ のときを考える。

$a>0$ であるから，① の左辺は，相加平均，相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{a}+2a\geqq 2\sqrt{\frac{1}{a}\times 2a}=2\sqrt{2}$$

一方，$b>\dfrac{1}{32}$ であるから，① の右辺は　$\dfrac{1}{2\sqrt{b}}<2\sqrt{2}$

よって　$\dfrac{1}{a}+2a\neq\dfrac{1}{2\sqrt{b}}$　　したがって　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)\neq\lim_{x\to-0} f(x)$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ が存在しないから，$f(x)$ は $x=0$ において連続ではない。

漸化式と極限２～高次導関数までの答え

10 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2e^{2x}(x+1)-e^{2x}\cdot 1}{(x+1)^2}=\dfrac{e^{2x}(2x+1)}{(x+1)^2}$

11 $f(x)=\log\{\log(x+e)\}$ とおく。

$f(x)$ の定義域は　$x+e>0$　かつ　$\log(x+e)>0$

よって　$x+e>0$　かつ　$x+e>1$　　ゆえに　$x>1-e$

また，$f(0)=\log(\log e)=\log 1=0$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\{\log(x+e)\}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

ここで，$f(x)$ は $x>1-e$ において微分可能な関数で

$$f'(x)=\frac{\{\log(x+e)\}'}{\log(x+e)}=\frac{\dfrac{(x+e)'}{x+e}}{\log(x+e)}=\frac{1}{(x+e)\log(x+e)}$$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\{\log(x+e)\}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\frac{1}{e}$

12 与えられた関数を $f(x)$ とする。

$f(x)$ は $x>2$ と $x<2$ で微分可能であるから，$x=2$ で微分可能であればよい。

$f(x)$ が $x=2$ で微分可能であるとき，$x=2$ で連続であるから

$$\lim_{x\to 2-0}f(x)=f(2)\qquad すなわち\quad \lim_{x\to 2-0}(ax^2+bx)=f(2)$$

よって　$4a+2b=3+\sqrt{2}$　…… ①

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to +0}\frac{\sqrt{(2+h)^2-2}+3-(3+\sqrt{2})}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{\sqrt{h^2+4h+2}-\sqrt{2}}{h}$$
$$=\lim_{h\to +0}\frac{(h^2+4h+2)-2}{h(\sqrt{h^2+4h+2}+\sqrt{2})}=\lim_{h\to +0}\frac{h+4}{\sqrt{h^2+4h+2}+\sqrt{2}}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

また，① から

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to -0}\frac{a(2+h)^2+b(2+h)-(3+\sqrt{2})}{h}$$
$$=\lim_{h\to -0}\frac{4ah+ah^2+bh+(4a+2b)-(3+\sqrt{2})}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{4ah+ah^2+bh}{h}$$
$$=\lim_{h\to -0}(4a+ah+b)=4a+b$$

よって，$f'(2)$ が存在するための条件は　$4a+b=\sqrt{2}$　…… ②

①，② を解いて　$a={}^{ア}\dfrac{-3+\sqrt{2}}{4}$，$b={}^{イ}3$

漸化式と極限２～高次導関数までの答え

13 $y=xe^{ax}$ から　$y'=1\cdot e^{ax}+x\cdot ae^{ax}=e^{ax}(ax+1)$

$y''=ae^{ax}(ax+1)+e^{ax}\cdot a=e^{ax}(a^2x+2a)$

よって　$y''+4y'+4y=e^{ax}(a^2x+2a)+4e^{ax}(ax+1)+4xe^{ax}$

$=e^{ax}\{(a^2+4a+4)x+2a+4\}=e^{ax}\{(a+2)^2x+2(a+2)\}$

ゆえに　$e^{ax}\{(a+2)^2x+2(a+2)\}=0$

$e^{ax}>0$ であるから　$(a+2)^2x+2(a+2)=0$

これが x についての恒等式であるから　$(a+2)^2=0$，$2(a+2)=0$

ゆえに　$a=-2$

14 $f(x)=\log(\sqrt{a^2+x^2}-x)$ から　$f(0)=\log\sqrt{a^2}=\log|a|$

$a>0$ であるから　$f(0)=\log a$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}-x}\cdot\left(\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}-1\right)$$

$$=\frac{x-\sqrt{a^2+x^2}}{(\sqrt{a^2+x^2}-x)\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{-1}{\sqrt{a^2+x^2}}=-(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

よって　$f'(0)=-(a^2)^{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{a}$

$$f''(x)=-\left(-\frac{1}{2}\right)(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=x(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

よって　$f''(0)=0\cdot(a^2)^{-\frac{3}{2}}=0$

$$f'''(x)=1\cdot(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}+x\cdot\left\{-\frac{3}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x\right\}=(a^2+x^2)^{-\frac{5}{2}}\{(a^2+x^2)-3x^2\}$$

$$=(a^2+x^2)^{-\frac{5}{2}}(a^2-2x^2)$$

よって　$f'''(0)=(a^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot a^2=\dfrac{1}{a^3}$

したがって　$f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f'''(0)}{3!}x^3=\log a-\dfrac{1}{a}x+\dfrac{1}{6a^3}x^3$

15 (1)　$f(x)$ が定数関数であると仮定すると，第１式から $f(x)=0$ となり，$f(0)=1$ と矛盾。

よって，$f(x)$ は定数関数ではない。

$f(x)$ の最高次の項を ax^n（$n\geqq 1$，$a\neq 0$）とすると，$f'(x)$ の最高次の項は nax^{n-1} で

あるから，$xf''(x)+(1-x)f'(x)+3f(x)$ の最高次の項は $-nax^n+3ax^n$ となり

$(-n+3)a=0$　　$a\neq 0$ であるから　$n=3$

したがって　３次

(2)　(1) および $f(0)=1$ から，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$（$a\neq 0$）とおける。

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，$f''(x)=6ax+2b$

これらを与式に代入して整理すると　$(9a+b)x^2+(4b+2c)x+c+3=0$

これが x についての恒等式であるから　$9a+b=0$，$4b+2c=0$，$c+3=0$

これを解いて　$a=-\dfrac{1}{6}$，$b=\dfrac{3}{2}$，$c=-3$（$a\neq 0$ を満たす）

したがって　$f(x)=-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-3x+1$