漸化式と極限２

1 1 辺の長さが 1 の正方形を S_1 とし，S_1 に内接する円を C_1，C_1 に内接する 1 つの正方形を S_2，S_2 に内接する円を C_2 とする。以下同様に，自然数 n に対し，正方形 S_n，円 C_n を定める。すなわち，正方形 S_n の内接円が C_n であり，正方形 S_{n+1} は円 C_n に内接している。

(1) S_n の 1 辺の長さを l_n とするとき，C_n の半径を l_n で表せ。

(2) 数列 $\{l_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) S_n の内部から C_n の内部を除いた部分の面積を a_n とする。$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ。

2 正の整数 n に対して，整数 a_n，b_n を $\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^n}=a_n+b_n\sqrt{2}$ によって定める。

(1) a_2 の値を求めよ。

(2) a_{n+1}，b_{n+1} を，それぞれ a_n，b_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{a_n-b_n\sqrt{2}\}$ の一般項を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ を求めよ。

3 ある箱に 1 から 5 までの整数のうち 1 つが書かれたカードがそれぞれ 1 枚入っている。そこから 1 枚カードをひき，数字を確認してから元の箱に戻す。
このような操作を繰り返したとき，k 回目に取り出したカードの数字を A_k とし，
$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k$ とする。このとき，T_n が奇数となる確率を p_n とする。

(1) p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

(2) 数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の極限を求めよ。

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$

$\boxed{5}$ $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\cos x)}{x-\frac{\pi}{2}}$ を求めよ。

$\boxed{6}$ $0<a<1$ とする。曲線 $y=x^2$ と $y=a\sin x$ の原点以外の交点の x 座標を $m(a)$ で表すとき，$\displaystyle\lim_{a \to +0} m(a)=0$ であることを示せ。さらに，$\displaystyle\lim_{a \to +0} \frac{m(a)}{a}$ を求めよ。

7　a を実数とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=\begin{cases} a\sin x+\cos x & \left(x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right) \\ x-\pi & \left(x>\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ で定義する。

$f(x)$ が $x=\dfrac{\pi}{2}$ で連続となる a の値を求めよ。

8　$S_n(x)=x+x\cdot\dfrac{1-3x}{1-2x}+x\cdot\left(\dfrac{1-3x}{1-2x}\right)^2+\cdots\cdots+x\cdot\left(\dfrac{1-3x}{1-2x}\right)^{n-1}$（$n$ は自然数）について，次の問いに答えよ。

(1)　数列 $\{S_n(x)\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。

(2)　$S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$ とするとき，$y=S(x)$ のグラフをかけ。

(3)　関数 $S(x)$ の連続性を調べよ。

9　a，b，c は正の実数とする。$-b<x<\dfrac{\pi}{2a}$，$x\fallingdotseq 0$ である x に対して，次のように定義された関数 $f(x)$ について考える。

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+b}-c}{x} & (-b<x<0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{x+2\sin(a^2x)}{\sin(ax)} & \left(0<x<\dfrac{\pi}{2a} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

(1)　$x=0$ における右側からの極限値 $\lim\limits_{x\to+0}f(x)$ を求めよ。

(2)　$x=0$ における左側からの極限値 $\lim\limits_{x\to-0}f(x)$ が存在するときの b，c の条件，および $\lim\limits_{x\to-0}f(x)$ を求めよ。

(3)　$\lim\limits_{x\to-0}f(x)$ は存在するものとする。$b=\dfrac{1}{32}$ のとき，$f(x)$ が $x=0$ で連続になるように，a と $f(0)$ の値を定めよ。また，$b>\dfrac{1}{32}$ のとき，a と $f(0)$ の値をどのように定めても，$f(x)$ が $x=0$ で連続になることはないことを示せ。

導関数

$\boxed{10}$ 次の関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を x で表せ。

$$y=\frac{e^{2x}}{x+1}$$

$\boxed{11}$ 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\{\log(x+e)\}$ を求めよ。

$\boxed{12}$ a，b を実数の定数とする。関数 $y=\begin{cases}\sqrt{x^2-2}+3 & (x\geqq 2)\\ ax^2+bx & (x<2)\end{cases}$ が微分可能になるのは

$a=$ ア $\boxed{\quad}$，$b=$ イ $\boxed{\quad}$ のときである。

$\boxed{13}$ 関数 $y=xe^{ax}$ が $y''+4y'+4y=0$ を満たすとき，定数 a の値を求めよ。

$\boxed{14}$ a を正の定数として，関数 $f(x)$ を $f(x)=\log\left(\sqrt{a^2+x^2}-x\right)$ とおく。$f(x)$ を微分して，多項式 $f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f'''(0)}{3!}x^3$ を求めよ。

$\boxed{15}$ x の多項式で表された関数 $f(x)$ が

$$xf''(x)+(1-x)f'(x)+3f(x)=0,\quad f(0)=1$$

を満たす。

(1) $f(x)$ の次数を求めよ。

(2) $f(x)$ を求めよ。