

① 次の式を展開せよ。

- (1) $(2x+3)^3$
 (2) $(3x-2y)^3$

解説

$$(1) (2x+3)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 + 3^3 \\ = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$$

$$(2) (3x-2y)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2(2y) + 3 \cdot 3x(2y)^2 - (2y)^3 \\ = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$$

$$(3x-2y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(-2y) + 3 \cdot 3x(-2y)^2 + (-2y)^3 \quad -2yと符号もまとめれば(1)の和の公式と同じです \\ = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 \quad (a+b)^3, (a-b)^3の2つも覚える必要はないです$$

② 次の式を展開せよ。

- (1) $(a+3b-c)^2$

解説

$$(1) (a+3b-c)^2 = \{a+3b+(-c)\}^2 \\ = a^2 + (3b)^2 + (-c)^2 + 2 \cdot a \cdot 3b + 2 \cdot 3b(-c) + 2(-c)a \\ = a^2 + 9b^2 + c^2 + 6ab - 6bc - 2ca \quad \text{課題テストと同じ問題です。ちゃんと公式を使えましたか?}$$

③ 次の式を展開せよ。

- (3) $(x-1)(x^4+1)(x^3+x^2+x+1)$

解説

$$(3) (x-1)(x^4+1)(x^3+x^2+x+1) = \{(x-1)(x^3+x^2+x+1)\}(x^4+1) \\ = \{(x^4+x^3+x^2+x) - (x^3+x^2+x+1)\}(x^4+1) \\ = (x^4-1)(x^4+1) = x^8-1$$

ペアを作って展開します。同じようなものができればくったり、置き換えたりできますね。また一があるのでもよく消えてくれるかもしれません。そんな予想をたてながら4乗が2つできるようにペアを作ります。

④ 次の式を因数分解せよ。

- (4) $2x^2+5x+3$
 (5) $2x^2-7x+3$
 (6) $6x^2-xy-12y^2$

解説

$$(4) 2x^2+5x+3 = (x+1)(2x+3) \quad \text{この3問は必ずできるようにしておいてください}$$

$$(5) 2x^2-7x+3 = (x-3)(2x-1)$$

$$(6) 6x^2-xy-12y^2 = (2x-3y)(3x+4y) \quad yを忘れないように!$$

$$(4) \begin{array}{ccc} 1 & \times & 1 \longrightarrow 2 \\ 2 & \times & 3 \longrightarrow 3 \\ \hline 2 & & 3 \quad 5 \end{array}$$

$$(5) \begin{array}{ccc} 1 & \times & -3 \longrightarrow -6 \\ 2 & \times & -1 \longrightarrow -1 \\ \hline 2 & & 3 \quad -7 \end{array}$$

$$(6) \begin{array}{ccc} 2 & \times & -3y \longrightarrow -9y \\ 3 & \times & 4y \longrightarrow 8y \\ \hline 6 & & -12y^2 \quad -y \end{array}$$

5 次の式を因数分解せよ。

(2) $64x^3 - 1$

解説

$$\begin{aligned} (2) \quad 64x^3 - 1 &= (4x)^3 - 1^3 \\ &= (4x - 1)\{(4x)^2 + 4x \cdot 1 + 1^2\} \\ &= (4x - 1)(16x^2 + 4x + 1) \quad \text{プラスマイナスに注意} \end{aligned}$$

6 次の式を因数分解せよ。

(2) $(x^2 - 2x - 16)(x^2 - 2x - 14) + 1$

(3) $x^4 - 2x^2 - 8$

解説

$$\begin{aligned} (2) \quad (x^2 - 2x - 16)(x^2 - 2x - 14) + 1 &= \{(x^2 - 2x) - 16\}\{(x^2 - 2x) - 14\} + 1 \quad A = x^2 - 2x \text{ と置いてもいいです} \\ &= (x^2 - 2x)^2 - 30(x^2 - 2x) + 224 + 1 \quad \text{同じ部分を見つけ、(頭の中で)置き換えます} \\ &= (x^2 - 2x)^2 - 30(x^2 - 2x) + 225 \\ &= \{(x^2 - 2x) - 15\}^2 = \{(x + 3)(x - 5)\}^2 \\ &= (x + 3)^2(x - 5)^2 \end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x - 16)(x^2 - 2x - 14) + 1 &= (x^2 - 2x - 16)\{(x^2 - 2x - 16) + 2\} + 1 \quad \text{置き換える部分が多いほど、} \\ & \quad \text{その後の計算は楽になります} \\ &= (x^2 - 2x - 16)^2 + 2(x^2 - 2x - 16) + 1 \\ &= \{(x^2 - 2x - 16) + 1\}^2 \\ &= (x^2 - 2x - 15)^2 = \{(x + 3)(x - 5)\}^2 \\ &= (x + 3)^2(x - 5)^2 \end{aligned}$$

7 次の式を因数分解せよ。

- (1) $2ab^2 - 3ab - 2a + b - 2$
 (2) $8x^3 + 12x^2y + 4xy^2 + 6x^2 + 9xy + 3y^2$

8 次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 3y + 1$
 (4) $2x^2 - 3xy - 2y^2 - 5x + 5y + 3$

別解 $(x^2 - 2x - 16)(x^2 - 2x - 14) + 1 = \{(x^2 - 2x - 15) - 1\}\{(x^2 - 2x - 15) + 1\} + 1$

絶妙だと思いませんか?? 同じものを作った後が $(A-1)(A+1)$ となっていて展開しやすい!
 ただ問題が解けるだけでなく、こういう工夫を面白がって身に付けていくと力が上がりますよ!

$$= (x^2 - 2x - 15)^2 - 1 + 1 = (x^2 - 2x - 15)^2$$

$$= \{(x+3)(x-5)\}^2 = (x+3)^2(x-5)^2$$

(3) $x^4 - 2x^2 - 8 = (x^2)^2 - 2x^2 - 8 = (x^2 + 2)(x^2 - 4)$
 $= (x^2 + 2)(x+2)(x-2)$

解説

(1) $2ab^2 - 3ab - 2a + b - 2 = (2b^2 - 3b - 2)a + b - 2$ 次数が低い a について整理します
 $= (b-2)(2b+1)a + (b-2)$ 2乗や3乗があれば因数分解できないかと疑いましょう
 $= (b-2)\{(2b+1)a + 1\}$ HPにアップしてある「紙面授業①」も参考にしてください
 $= (b-2)(2ab + a + 1)$

(2) $8x^3 + 12x^2y + 4xy^2 + 6x^2 + 9xy + 3y^2 = (4x+3)y^2 + 3x(4x+3)y + 2x^2(4x+3)$ 次数が低いのは y です
 $= (4x+3)(y^2 + 3xy + 2x^2)$
 $= (4x+3)(y+x)(y+2x)$
 $= (4x+3)(x+y)(2x+y)$

解説

(1) $x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 3y + 1 = x^2 + (3y+2)x + 2y^2 + 3y + 1$ x, y ともに2次なので、係数の小さい x について整理します。 x のついてない部分は因数分解できます
 2乗があればいつでも因数分解を疑いましょう
 $= x^2 + (3y+2)x + (y+1)(2y+1)$ ……[A]
 $= \{x + (y+1)\}\{x + (2y+1)\}$ ……[B]
 $= (x+y+1)(x+2y+1)$

$$\begin{array}{r}
 \text{[A]} \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad \times \quad 1 \longrightarrow 2 \\
 2 \quad \times \quad 1 \longrightarrow 1 \\
 \hline
 2 \quad 1 \quad 3
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{[B]} \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad \times \quad y+1 \longrightarrow y+1 \\
 1 \quad \times \quad 2y+1 \longrightarrow 2y+1 \\
 \hline
 1 \quad (y+1)(2y+1) \quad 3y+2
 \end{array}
 \end{array}$$

(4) $2x^2 - 3xy - 2y^2 - 5x + 5y + 3 = 2x^2 + (-3y - 5)x - (2y^2 - 5y - 3)$ 当然マイナスがついてないほうで整理

$$\begin{aligned}
 &= 2x^2 + (-3y - 5)x - (y - 3)(2y + 1) \quad \dots\dots \text{[A]} \\
 &= \{x - (2y + 1)\}\{2x + (y - 3)\} \quad \dots\dots \text{[B]} \\
 &= (x - 2y - 1)(2x + y - 3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{[A]} \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad \times \quad -3 \longrightarrow -6 \\
 2 \quad \times \quad 1 \longrightarrow 1 \\
 \hline
 2 \quad -3 \quad -5
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{[B]} \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad \times \quad -(2y+1) \longrightarrow -4y-2 \\
 2 \quad \times \quad y-3 \longrightarrow y-3 \\
 \hline
 2 \quad -(y-3)(2y+1) \quad -3y-5
 \end{array}
 \end{array}$$

9 チャレンジ問題①

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^4 + x^2 + 1$

10 チャレンジ問題②

次の式を因数分解せよ。

(5) $x^4 - 7x^2y^2 + y^4$

解説

(1) $x^2 = A$ と考えれば $A^2 + A + 1$ これじゃ無理ですね。 $A^2 + 2A + 1$ だったらできるので、無理やり $2A$ にしてあとで A を引いておきます。

一通り因数分解ができるようになった人は、「自分はどのような式ならば因数分解できるのか」が判断でできるようになっておきましょう。そうすれば、今回のような問題にも「このような形にならないと因数分解できない」ということができます。

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = \{(x^2 + 1) + x\}\{(x^2 + 1) - x\} = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

解説

$$\begin{aligned}
 (5) \quad x^4 - 7x^2y^2 + y^4 &= (x^2)^2 + 2x^2y^2 + (y^2)^2 - 9x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - (3xy)^2 \\
 &= \{(x^2 + y^2) + 3xy\}\{(x^2 + y^2) - 3xy\} \\
 &= (x^2 + 3xy + y^2)(x^2 - 3xy + y^2)
 \end{aligned}$$