理系　数学演習２　クリアー　　その３，４　　　解説

$\boxed{13}$ [三訂版クリアーⅠⅡAB受 Step Up45]

2 次方程式 $x^2+mx+m=0$ の判別式を D とすると，2 次不等式 $x^2+mx+m<0$ が実数の解をもたないとき　　$D=m^2-4m=m(m-4)\leqq 0$

よって　　$m(m-4)\leqq 0$　　　　ゆえに　$^{ア}0\leqq m\leqq {}^{イ}4$

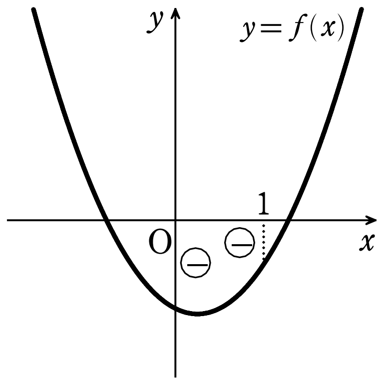
また，$f(x)=x^2+mx+m$ とおく。

2 次不等式 $x^2+mx+m<0$ の解が $0\leqq x\leqq 1$ を含むためには，2 次関数 $y=f(x)$ のグラフが $0\leqq x\leqq 1$ において常に $y<0$ の位置にあればよい。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，求める条件は，図より　　$f(0)<0$ かつ $f(1)<0$

よって　　$m<0$ かつ $2m+1<0$

ゆえに　　$m<{}^{ウ}-\dfrac{1}{2}$



$\boxed{14}$ [三訂版クリアーⅠⅡAB受 Step Up47]

$2x^2+x-3>0$ から　　$(2x+3)(x-1)>0$　　　　よって　$x<-\dfrac{3}{2}$，$1<x$　……①

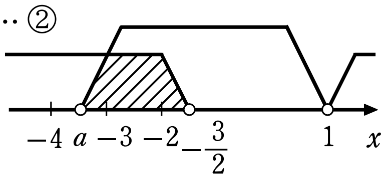
また，$x^2-(a+1)x+a<0$ から　　$(x-1)(x-a)<0$　……②

[1]　$a<1$ のとき

　② の解は　　$a<x<1$

　これと ① の共通範囲に整数をちょうど 2 つ含む

　条件は　　$-4\leqq a<-3$



[2]　$a=1$ のとき

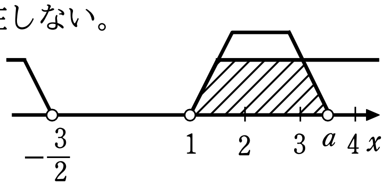
　② は　　$(x-1)^2<0$　　　　これを満たす実数 x は存在しない。

[3]　$1<a$ のとき

　② の解は　　$1<x<a$

　これと ① の共通範囲に整数をちょうど 2 つ含む

　条件は　　$3<a\leqq 4$



[1]～[3] より，求める a の値の範囲は　　$-4\leqq a<-3$，$3<a\leqq 4$

$\boxed{15}$ [三訂版クリアーⅠⅡＡＢ受 Step Up51]

(1)　$x=\sqrt{2}-1$ から　　$x+1=\sqrt{2}$

両辺を 2 乗すると　　$(x+1)^2=2$　　　すなわち　$x^2+2x-1=0$

x^3+3x^2+2x+1 を x^2+2x-1 で割ると，商は $x+1$，余りは $x+2$

ゆえに　　$x^3+3x^2+2x+1=(x^2+2x-1)(x+1)+x+2=0+(\sqrt{2}-1)+2=\sqrt{2}+1$

(2)　$\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\dfrac{4(\sqrt{5}+1)}{4}=\sqrt{5}+1$

$2<\sqrt{5}<3$ であるから　　$3<\sqrt{5}+1<4$

よって　　$a=^{ア}3$

$b=(\sqrt{5}+1)-a=(\sqrt{5}+1)-3=^{イ}\sqrt{5}-2$

このとき　$a^2-b^2-4a-4b=a(a-4)-b(b+4)=3\cdot(-1)-(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$

$=-3-1=^{ウ}-4$

$\boxed{16}$ [三訂版クリアーⅠⅡＡＢ受 Step Up53]

$$11^{10}=(1+10)^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1\cdot 10+{}_{10}C_2\cdot 10^2+{}_{10}C_3\cdot 10^3+\cdots\cdots+{}_{10}C_{10}\cdot 10^{10}$$
$$={}_{10}C_0+{}_{10}C_1\cdot 10+{}_{10}C_2\cdot 10^2+({}_{10}C_3+\cdots\cdots+{}_{10}C_{10}\cdot 10^7)\times 10^3$$

ここで，$N={}_{10}C_3+\cdots\cdots+{}_{10}C_{10}\cdot 10^7$ とおくと，N は整数であり，$N\times 10^3$ は下 3 桁が 000 の整数である。

よって，11^{10} の百の位の数は ${}_{10}C_0+{}_{10}C_1\cdot 10+{}_{10}C_2\cdot 10^2$ の百の位の数と等しい。

$${}_{10}C_0+{}_{10}C_1\cdot 10+{}_{10}C_2\cdot 10^2=1+100+4500=4601$$

ゆえに，11^{10} の百の位の数は　　6

$\boxed{17}$ [三訂版クリアーⅠⅡＡＢ受 Step Up57]

$\left(a-\dfrac{1}{b}\right)\left(b-\dfrac{4}{a}\right)=ab+\dfrac{4}{ab}-5$

$ab>0$，$\dfrac{4}{ab}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$ab+\frac{4}{ab}-5\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}-5=-1$$

等号は，$ab=\dfrac{4}{ab}$ すなわち $ab=2$ のとき成り立つ。

よって，求める最小値は　　-1

$\boxed{18}$ [三訂版クリアーⅠⅡＡＢ受 Step Up59]

(1)　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2$

$\qquad -a^2x^2-b^2y^2-c^2z^2-2abxy-2bcyz-2cazx$

$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2+b^2z^2-2bcyz+c^2y^2+c^2x^2-2cazx+a^2z^2$

$=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2\geqq 0$

よって，$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$ が成り立つ。

(2)　(1) の不等式で $a=b=c=1$ とおくと

$3(x^2+y^2+z^2)\geqq(x+y+z)^2=1$　　　よって　$x^2+y^2+z^2\geqq\dfrac{1}{3}$

等号が成り立つのは，$y-x=z-y=x-z=0$ すなわち $x=y=z$ のとき。

このとき，$x+y+z=1$ から　　$x=y=z=\dfrac{1}{3}$

したがって，$x^2+y^2+z^2$ は $x=y=z=\dfrac{1}{3}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{3}$ をとる。

$\boxed{19}$ [三訂版クリアーⅠⅡＡＢ受 Step Up65]

(1)　真

(証明)　x が正の無理数かつ y が正の有理数で，$x+y$ が無理数でない，すなわち $x+y$ は有理数であると仮定する。

x，y は正であるから，$x+y$ も正である。

よって，$y=\dfrac{b}{a}$，$x+y=\dfrac{d}{c}$ (a，b，c，d は正の整数) と表せるから

$$x=\frac{d}{c}-\frac{b}{a}=\frac{ad-bc}{ac}$$

a，b，c，d は正の整数であるから，$\dfrac{ad-bc}{ac}$ は有理数である。

これは x が無理数であることに矛盾する。

ゆえに，x が無理数かつ y が有理数ならば，$x+y$ は無理数。

(2)　偽　　反例は　　$x=\sqrt{2}$，$y=2-\sqrt{2}$

$\boxed{20}$ [三訂版クリアーⅠⅡAB受 Step Up71]

(1)　$n^2-n=(n-1)n$

$n-1$，n は連続する 2 整数であるから，その積は 2 の倍数である。

よって，n^2-n は偶数である。

(2)　$n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$

(1) より，$(n-1)n$ は 2 の倍数であるから，n^3-n は 2 の倍数である。

また，$n-1$，n，$n+1$ は連続する 3 整数であるから，その積は 3 の倍数である。

よって，n^3-n は 2 の倍数かつ 3 の倍数であるから，6 の倍数である。

(3)　$n^5-n=n(n^4-1)=n(n^2-1)(n^2+1)=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$

(2) より，$(n-1)n(n+1)$ は 6 の倍数であるから，n^5-n が 30 の倍数であることを示すには，5 の倍数であることを示せばよい。

n は $5k$，$5k\pm1$，$5k\pm2$ (k は整数) のいずれかの形で表される。

[1]　$n=5k$ のとき　n が 5 の倍数になる。

[2]　$n=5k+1$ のとき

$n-1=5k$ であるから，$n-1$ が 5 の倍数になる。

[3]　$n=5k-1$ のとき

$n+1=5k$ であるから，$n+1$ が 5 の倍数になる。

[4]　$n=5k\pm2$ のとき

$$n^2+1=(5k\pm2)^2+1=5(5k^2\pm4k+1)\quad(\text{複号同順})$$

よって，n^2+1 が 5 の倍数になる。

[1] ～ [4] から，n^5-n は 5 の倍数である。

したがって，n^5-n は 30 の倍数である。

(4)　3 以上の奇数 m は 2 以上の整数でもあるから，(3) より，m^5-m は 30 の倍数である。

m は 3 以上の奇数であるから，$m=2l+1$ (l は自然数) とおくと

$$m^5-m=(m-1)m(m+1)(m^2+1)=(2l+1-1)(2l+1)(2l+1+1)\{(2l+1)^2+1\}$$
$$=2l(2l+1)\cdot2(l+1)\cdot2(2l^2+2l+1)=8l(l+1)(2l+1)(2l^2+2l+1)$$

ここで，$l(l+1)$ は連続する 2 整数の積であるから，2 の倍数である。

よって，m^5-m は $8\cdot2=16$ の倍数である。

ゆえに，m^5-m は 30 の倍数かつ 16 の倍数であるから，30 と 16 の最小公倍数 240 の倍数である。

別解　2 つの整数 a，b について，$a-b$ が正の整数 M の倍数であるとき，

$a\equiv b \pmod{M}$ と表す。

(1)　$n\equiv0 \pmod{2}$，$n\equiv1 \pmod{2}$ のいずれかが成り立つ。

$n\equiv0 \pmod{2}$ のとき　　$n^2-n\equiv0^2-0=0 \pmod{2}$

$n\equiv1 \pmod{2}$ のとき　　$n^2-n\equiv1^2-1=0 \pmod{2}$

ゆえに，いずれの場合も 2 の倍数である。

(2)　$n^3-n=(n^2-n)(n+1)$ と (1) より，n^3-n が 3 の倍数であることを示せばよい。

$n\equiv0 \pmod{3}$，$n\equiv\pm1 \pmod{3}$ のいずれかが成り立つ。

$n\equiv0 \pmod{3}$ のとき　　$n^3-n\equiv0^3-0=0 \pmod{3}$

$n \equiv \pm 1 \pmod 3$ のとき　　$n^3-n \equiv (\pm 1)^3-(\pm 1)=0 \pmod 3$

ゆえに，いずれの場合も n^3-n は3の倍数であるから，n^3-n は6の倍数である。

(3)　$n^5-n=(n^3-n)(n^2+1)$ と (2) より，n^5-n が5の倍数であることを示せばよい。

$n \equiv 0$，± 1，$\pm 2 \pmod 5$ のいずれかが成り立つ。

$n \equiv 0 \pmod 5$ のとき　　$n^5-n \equiv 0^5-0=0 \pmod 5$

$n \equiv \pm 1 \pmod 5$ のとき　　$n^5-n \equiv (\pm 1)^5-(\pm 1)=0 \pmod 5$

$n \equiv \pm 2 \pmod 5$ のとき　　$n^5-n \equiv (\pm 2)^5-(\pm 2)=\pm 30 \equiv 0 \pmod 5$

ゆえに，いずれの場合も n^5-n は5の倍数であるから，n^5-n は30の倍数である。

(4)　(3) より，m^5-m が16の倍数であることを示せばよい。

m は奇数であるから，$m \equiv \pm 1$，± 3，± 5，$\pm 7 \pmod{16}$ のいずれかが成り立つ。

いずれの場合も，$m^5-m=(m-1)m(m+1)(m^2+1) \equiv 0 \pmod{16}$ となるから，

m^5-m は16の倍数である。

したがって，m^5-m は240の倍数である。

21 [三訂版クリアーⅠⅡＡＢ受 Step Up73]

$$f(n)=(n^4+22n^2+121)-49n^2=(n^2+11)^2-(7n)^2$$
$$=\{(n^2+11)+7n\}\{(n^2+11)-7n\}=(n^2+7n+11)(n^2-7n+11)$$

n を自然数とすると　　$n^2+7n+11>11$

よって，$|f(n)|$ が素数となるとき　　$n^2-7n+11=\pm 1$

[1]　$n^2-7n+11=1$ のとき

$n^2-7n+10=0$ であるから　　$(n-2)(n-5)=0$　　　　したがって　$n=2$，5

$n=2$ のとき，$n^2+7n+11=29$ であるから，$f(n)=29$ となり，$|f(n)|$ は素数である。

$n=5$ のとき，$n^2+7n+11=71$ であるから，$f(n)=71$ となり，$|f(n)|$ は素数である。

[2]　$n^2-7n+11=-1$ のとき

$n^2-7n+12=0$ であるから　　$(n-3)(n-4)=0$　　　　したがって　$n=3$，4

$n=3$ のとき，$n^2+7n+11=41$ であるから，$f(n)=-41$ となり，$|f(n)|$ は素数である。

$n=4$ のとき，$n^2+7n+11=55$ であるから，$f(n)=-55$ となり，$|f(n)|$ は素数でない。

[1]，[2] から，$|f(n)|$ が素数となるような自然数 n は3個存在する。

22 [三訂版クリアーⅠⅡAB受 Step Up77]

$\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=1$ の両辺に xy を掛けて整理すると　　$xy-2x-3y=0$

よって　　$(x-3)(y-2)=6$　…… ①

x，y が正の整数であるとき，$x-3$，$y-2$ は整数であり　　$x-3 \geqq -2$，$y-2 \geqq -1$

したがって，① を満たす $(x-3,\ y-2)$ の組は

$$(x-3,\ y-2)=(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$$

ゆえに　　$(x,\ y)=(4,\ 8),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4),\ (9,\ 3)$

$|x-y|$ の値が最大となるのは，$(x,\ y)=(9,\ 3)$ のときである。

23 [三訂版クリアーⅠⅡAB受 Step Up79]

(1)　$2m^2-n^2-mn-m+n=2m^2-(n+1)m-n(n-1)$

$$=(m-n)\{2m+(n-1)\}=(m-n)(2m+n-1)$$

よって　　$(m-n)(2m+n-1)=18$　…… ①

m，n が自然数であるとき，$m-n$，$2m+n-1$ は整数であり，また

$$2m+n-1>0,\ 2m+n-1>m-n$$

ゆえに，① を満たす $(m-n,\ 2m+n-1)$ の組は

$$(m-n,\ 2m+n-1)=(1,\ 18),\ (2,\ 9),\ (3,\ 6)$$

[1]　$(m-n,\ 2m+n-1)=(1,\ 18)$ のとき

$m=\dfrac{20}{3}$，$n=\dfrac{17}{3}$ となり，自然数でないから，不適。

[2]　$(m-n,\ 2m+n-1)=(2,\ 9)$ のとき　　$m=4$，$n=2$

[3]　$(m-n,\ 2m+n-1)=(3,\ 6)$ のとき

$m=\dfrac{10}{3}$，$n=\dfrac{1}{3}$ となり，自然数でないから，不適。

[1]～[3] から，求める自然数 m，n は　　$m=4$，$n=2$

(2)　$x^2-2xy+3y^2-2x-8y+13=0$ から　　$x^2-2(y+1)x+3y^2-8y+13=0$　…… ①

この x についての 2 次方程式の判別式を D とすると，① の解は整数 (実数) であるから

$$\frac{D}{4}=(y+1)^2-(3y^2-8y+13)=-2y^2+10y-12$$

$$=-2(y^2-5y+6)=-2(y-2)(y-3) \geqq 0$$

これを解くと　　$2 \leqq y \leqq 3$　　　y は整数であるから　$y=2,\ 3$

[1]　$y=2$ のとき　① は　　$x^2-6x+9=0$　　　ゆえに　$x=3$

[2]　$y=3$ のとき　① は　　$x^2-8x+16=0$　　　ゆえに　$x=4$

[1]，[2] から　　$(x,\ y)=(3,\ 2),\ (4,\ 3)$

$\boxed{24}$ [三訂版クリアーⅠⅡAB受 Step Up83]

(1)　7^1，7^2，7^3，7^4，7^5，…… の一の位は 7，9，3，1，7，…… であるから，7^n の
　一の位は 7，9，3，1 を繰り返すことがわかる。

$100=4\times25$ であるから，7^{100} の一の位は 1 である。

よって，7^{100} を 5 で割った余りは 1 である。

(2)　500! を計算したときの末尾に並ぶ 0 の個数は，500! を素因数分解したときの素因数 5 の個数に一致する。

1 から 500 までの自然数のうち，

　5 の倍数の個数は，500 を 5 で割った商で　100

　5^2 の倍数の個数は，500 を 5^2 で割った商で　20

　5^3 の倍数の個数は，500 を 5^3 で割った商で　4

　$500<5^4$ であるから，5^n $(n\geqq4)$ の倍数はない。

よって，素因数 5 の個数は，全部で　$100+20+4=124$

したがって，末尾に連続した 0 が 124 個並ぶ。

$\boxed{25}$ [三訂版クリアーⅠⅡAB受 Step Up83]

500! を計算したときの末尾に並ぶ 0 の個数は，500! を素因数分解したときの素因数 5 の個数に一致する。

1 から 500 までの自然数のうち，

　5 の倍数の個数は，500 を 5 で割った商で　100

　5^2 の倍数の個数は，500 を 5^2 で割った商で　20

　5^3 の倍数の個数は，500 を 5^3 で割った商で　4

　$500<5^4$ であるから，5^n $(n\geqq4)$ の倍数はない。

よって，素因数 5 の個数は，全部で　$100+20+4=124$

したがって，末尾に連続した 0 が 124 個並ぶ。

$\boxed{26}$ [三訂版クリアーⅠⅡＡＢ受 Step Up85]

2 次方程式の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=a-9, \quad \alpha\beta=a+3$$

a を消去して　$\alpha\beta=(\alpha+\beta+9)+3$　すなわち　$\alpha\beta-\alpha-\beta=12$

よって　$(\alpha-1)(\beta-1)=13$　…… ①

α，β は正の整数であるから，$\alpha-1$，$\beta-1$ は 0 以上の整数。

よって，① より　$(\alpha-1, \beta-1)=(1, 13), (13, 1)$

ゆえに　$(\alpha, \beta)=(2, 14), (14, 2)$

いずれの場合でも　$a=\alpha+\beta+9=16+9=25$

$x^3+ax^2+bx+1=0$ …… ① の整数解を $x=\alpha$ とすると　$\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+1=0$

よって　$\alpha(\alpha^2+a\alpha+b)=-1$　…… ②

α，a，b は整数であるから，$\alpha=1$ または $\alpha=-1$ である。

[1]　$\alpha=1$ のとき

　② に代入して　$1+a+b=-1$　よって　$b=-a-2$

　このとき，① は　$x^3+ax^2-(a+2)x+1=0$

　したがって　$(x-1)\{x^2+(a+1)x-1\}=0$

　ここで，2 次方程式 $x^2+(a+1)x-1=0$ の判別式を D_1 とすると，$D_1=(a+1)^2+4>0$

　から，方程式 $x^2+(a+1)x-1=0$ は虚数解をもたない。

　ゆえに ① は虚数解をもたない。

[2]　$\alpha=-1$ のとき

　② に代入して　$-(1-a+b)=-1$　よって　$b=a$ …… ③

　このとき，① は　$x^3+ax^2+ax+1=0$

　したがって　$(x+1)\{x^2+(a-1)x+1\}=0$

　ここで，2 次方程式 $x^2+(a-1)x+1=0$ が虚数解をもつ条件は，判別式を D_2 とする

　と，$D_2<0$ であるから　$D_2=(a-1)^2-4<0$

　整理して　$(a+1)(a-3)<0$　よって　$-1<a<3$

　これと ③ を満たす整数の組 (a, b) は　$(a, b)=(0, 0), (1, 1), (2, 2)$

[1], [2] から，求める整数の組 (a, b) は　ア3 組

このうち，a の値が最大となる組は　$(a, b)=($イ2，ウ$2)$

$\boxed{27}$ [三訂版クリアーⅠⅡAB受 Step Up91]

A 大学，B 大学，C 大学を受験した人の集合をそれぞれ A，B，C とすると，

$n(A)=105$，$n(B)=86$，$n(C)=81$，$n(A\cap B\cap C)=7$，$n(A\cup B\cup C)=200-18=182$

である。

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

であるから　$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$

$=n(A)+n(B)+n(C)+n(A\cap B\cap C)-n(A\cup B\cup C)$

$=105+86+81+7-182=97$

ちょうど 2 つの大学を受けた人は，$A\cap B$，$B\cap C$，$C\cap A$ のいずれかに属し，かつ，$A\cap B\cap C$ には属さないから

$$n(A\cap B\cap\overline{C})+n(B\cap C\cap\overline{A})+n(C\cap A\cap\overline{B})$$

$$=n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3\cdot n(A\cap B\cap C)=97-21={}^{ア}76\ (人)$$

よって，いずれか 1 つだけを受けた人は　$182-76-7={}^{イ}99$ (人)

$\boxed{28}$ [三訂版クリアーⅠⅡAB受 Step Up95]

0 ～ 9 から異なる 2 個の数字を選び，小さい順に a，b とする。

(1)　a 3 個，b 1 個の並べ方は　$\dfrac{4!}{3!1!}=4$ (通り)

　a 1 個，b 3 個の並べ方も同様に　4 通り

　そのおのおのについて，a，b の決め方は　${}_{10}\mathrm{C}_2=45$ (通り)

　よって，求める場合の数は　$(4+4)\times45=360$ (個)

(2)　a 2 個，b 2 個の並べ方は　$\dfrac{4!}{2!2!}=6$ (通り)

　そのおのおのについて，a，b の決め方は 45 通りある。

　よって，求める場合の数は　$6\times45=270$ (個)

(3)　0 ～ 9 から異なる 4 個の数字を選び，小さい順に左から並べると，条件を満たす番号が 1 つ決まるから　${}_{10}\mathrm{C}_4=210$ (個)