チェックプリント②解答解説

1 次の循環小数を分数で表せ。

(2)　$0.\dot{3}4\dot{2}$

解説

(2)　$x=0.\dot{3}4\dot{2}$ とおくと，右の計算から

$$x=\frac{342}{999}=\frac{38}{111}$$

$$\begin{array}{rrl} & 1000x= & 342.342342\cdots\cdots \\ -) & x= & 0.342342\cdots\cdots \\ \hline & 999x= & 342 \end{array}$$

小数点以下がそろうように 1000 倍

2 次の式を計算せよ。

(1)　$2\sqrt{48}-3\sqrt{27}+\sqrt{72}$

(2)　$(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$

(3)　$(2\sqrt{5}+\sqrt{3})(2\sqrt{5}-\sqrt{3})$

解説

(1)　$2\sqrt{48}-3\sqrt{27}+\sqrt{72}=2\sqrt{4^2\cdot 3}-3\sqrt{3^2\cdot 3}+\sqrt{6^2\cdot 2}$

$=2\cdot 4\sqrt{3}-3\cdot 3\sqrt{3}+6\sqrt{2}$

$=8\sqrt{3}-9\sqrt{3}+6\sqrt{2}=6\sqrt{2}-\sqrt{3}$

まず $\sqrt{\quad}$ の中を小さくしていきましょう

$\sqrt{3}$ どうしは計算できます

(2)　$(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2=(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2$

$=5+2\sqrt{10}+2=7+2\sqrt{10}$

展開の公式を活用しましょう

(3)　$(2\sqrt{5}+\sqrt{3})(2\sqrt{5}-\sqrt{3})=(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2$

$=20-3=17$

ここも展開の公式を活用

3 $0\leqq x<2$ の場合について，$\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-2)^2}$ の根号をはずして簡単にせよ。

解説

$P=\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-2)^2}=|x|+|x-2|$ とする。

$0\leqq x<2$ のとき，$x\geqq 0$，$x-2<0$ であるから

$P=x-(x-2)=2$

$\sqrt{x^2}=x$ ではありません！要注意！

$x=-2$ のとき↑の式は $\sqrt{(-2)^2}=-2$ になってしまいますね

これは正しいですか？左辺は $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$ なのに右辺は -2　おかしいですね。

$\sqrt{x^2}=|x|$ であれば $x=-2$ でも両辺が等しくなります。

4 次の式を，分母を有理化して簡単にせよ。

(2)　$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(3)　$\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2}-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-2}$

解説

(2)　$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

展開公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を

5 (2) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ の分母を有理化せよ。

6 $x=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x+y$，xy

(2) $3x^2-5xy+3y^2$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}$$

利用しています

$$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}=\sqrt{3}-1$$

(3) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2}-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-2}=\dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-2)-\sqrt{5}(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}=\dfrac{-4\sqrt{5}}{3-4}=4\sqrt{5}$

分母の有理化をおこなうと、その数がつかみやすくなります。例えば、$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ だと $\dfrac{1}{1.41\cdots}$ 有理化して $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ だと $\dfrac{1.41}{2}$

有理化した方がすぐに 0.7 くらいだとわかります。

解説

(2) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{7}}=\dfrac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\{(2+\sqrt{3})+\sqrt{7}\}\{(2+\sqrt{3})-\sqrt{7}\}}$

「ペアを作って展開」の応用ですね

$$=\frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{(2+\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2}=\frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{4\sqrt{3}}$$

数学は前に習ったことをどんどん利用していきます

$$=\frac{(2+\sqrt{3}-\sqrt{7})\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3+2\sqrt{3}-\sqrt{21}}{12}$$

今やっていることも次の「道具」にできるように！

解説

(1) $x+y=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\dfrac{(1-\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})^2}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}$

有理化してしまった人も多いのでは？？

$$=\frac{(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})}{-1}=-6$$

x , y をそれぞれ有理化しなくても通分することで

$$xy=\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=1$$

有理化できてしまいます。

(2) (1) より，$x+y=-6$，$xy=1$ であるから

$$3x^2-5xy+3y^2=3(x^2+y^2)-5xy$$
$$=3\{(x+y)^2-2xy\}-5xy$$
$$=3(x+y)^2-6xy-5xy$$

(2)のように x と y を入れかえても元と同じになる式を「対称式」と言い、必ず $x+y$ と xy で表すことができます

(1)がない問題でも、自分で $x+y$, xy を求めようと思ってください

7 $1+\sqrt{10}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，次の値を求めよ。

(1) a，b

(2) $b+\dfrac{1}{b}$，$b^2+\dfrac{1}{b^2}$

8 2重根号をはずして，次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

(2) $\sqrt{5-\sqrt{24}}$

9 次の不等式を解け。

(1) $3x<12-x$

(2) $2x-7\leqq 4x-1$

$=3(x+y)^2-11xy$

$=3(-6)^2-11\cdot 1=97$

解説

(1) $3<\sqrt{10}<4$ であるから，$\sqrt{10}$ の整数部分は　3　　よって，$1+\sqrt{10}$ の整数部分は　　$a=1+3=4$

小数部分は　　$b=(1+\sqrt{10})-4=\sqrt{10}-3$

(2) (1) から　　$b+\dfrac{1}{b}=\sqrt{10}-3+\dfrac{1}{\sqrt{10}-3}=\sqrt{10}-3+\dfrac{\sqrt{10}+3}{10-9}=2\sqrt{10}$

よって　　$b^2+\dfrac{1}{b^2}=\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2-2b\cdot\dfrac{1}{b}=(2\sqrt{10})^2-2\cdot 1=38$　　課題テストと同じです　進歩してる？

解説

(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3\cdot 1}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{1})^2}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{1}=\sqrt{3}+1$

(2) $\sqrt{5-\sqrt{24}}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

$=\sqrt{(3+2)-2\sqrt{3\cdot 2}}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

解説

(1) 移項すると　　$3x+x<12$　　すなわち　　$4x<12$

両辺を4で割って　　$x<3$

(2) 移項すると　　$2x-4x\leqq -1+7$　　すなわち　　$-2x\leqq 6$

両辺を -2 で割って　　$x\geqq -3$　　両辺を負の数 -2 で割っている($-\dfrac{1}{2}$ をかけている)のでひっくり返ります。　不等式はこれを忘れないように！

10 次の不等式を解け。

(1) $\begin{cases} 5x-1 \leqq 2x+6 \\ 3x+2 < 4x+1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-3 > 4x+1 \\ 4(x+1) < 2x+1 \end{cases}$

(3) $4x+3 \leqq 5x \leqq x-4$

解説

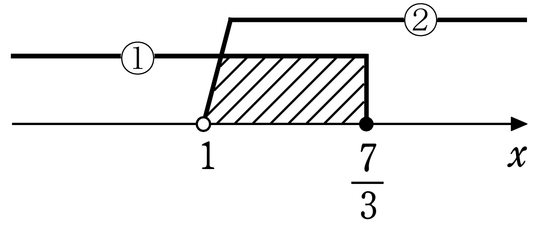
(1) $5x-1 \leqq 2x+6$ から　$3x \leqq 7$

よって　$x \leqq \dfrac{7}{3}$ ……①

$3x+2 < 4x+1$ から　$-x < -1$

よって　$x > 1$ ……②

①と②の共通範囲を求めて　$1 < x \leqq \dfrac{7}{3}$



(2) $x-3 > 4x+1$ から　$-3x > 4$

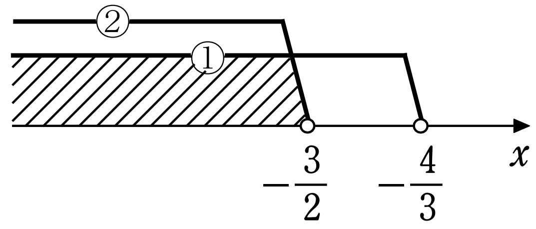
よって　$x < -\dfrac{4}{3}$ ……①

$4(x+1) < 2x+1$ から　$4x+4 < 2x+1$

整理すると　$2x < -3$

よって　$x < -\dfrac{3}{2}$ ……②

①と②の共通範囲を求めて　$x < -\dfrac{3}{2}$



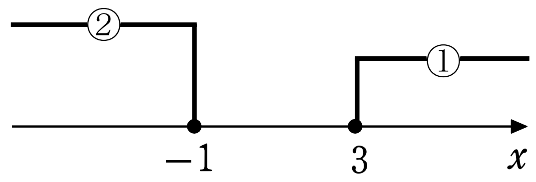
(3) $4x+3 \leqq 5x$ から　$-x \leqq -3$　　$a \leqq b \leqq c$ の形の不等式は前半の２つ、後半の２つに分けて考えます

よって　$x \geqq 3$ ……①

$5x \leqq x-4$ から　$4x \leqq -4$

よって　$x \leqq -1$ ……②

①と②の共通範囲はないから，この連立不等式の解はない。



11 チャレンジ問題

$a=2-\sqrt{3}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) a^2-4a+1 の値を求めよ。

※普通に代入するのは面白くありません！

(2) a^3-6a^2+5a+1 の値を求めよ。

解説

(1) $a-2=-\sqrt{3}$ であるから $(a-2)^2=(-\sqrt{3})^2$ 　2 乗した時に $\sqrt{}$ が消えるように移項しておきます

ゆえに $a^2-4a+4=3$ 　このアイディアは a^3 や a^4 が出てきたときに威力を発揮します

よって $a^2-4a+1=0$ 　代入して 3 乗や 4 乗はめんどくさいですよね

(2) (1) から $a^2=4a-1$ 　ここがこの問題のポイント！2 乗⇒ 1 乗の式を作ります

よって $a^3=a^2\cdot a=(4a-1)a=4a^2-a$ 　2 乗を作り出して $a^2=4a-1$ で 1 乗にする

$=4(4a-1)-a=16a-4-a=15a-4$

ゆえに $a^3-6a^2+5a+1=(15a-4)-6(4a-1)+5a+1$

$=15a-4-24a+6+5a+1$

$=-4a+3=-4(2-\sqrt{3})+3$

$=-5+4\sqrt{3}$

ナイスアイディアでした！