大学入試問題に挑戦　No. 2

a, b を正の定数とする。$0° < \theta < 180°$ を満たす角 θ に対し，平面上で，次の三つの条件 (i), (ii), (iii) を満たす三角形PAB, およびこの三角形と辺 AB を共有する長方形 ABCD を考える。

(i)　$PA = a$，$PB = b$，$\angle APB = \theta$ である。

(ii)　2点C, Dはともに直線ABに関して点Pと反対側にある。

(iii)　$AB = 3AD$ である。

三角形PABの面積と長方形ABCDの面積の和を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　辺ABの長さを a, b, θ を用いて表せ。

(2)　S を a, b, θ を用いて表せ。

(3)　$a = 16$, $b = 25$, $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$ とするとき，S を求めよ。また，点Pと直線ABの距離を求めよ。

[2020年　広島大学　文型　改]

大学入試問題に挑戦　No. 2　　文字が多いだけ！落ちついて整理していこう！

a, b を正の定数とする。$0° < \theta < 180°$ を満たす角 θ に対し，平面上で，次の三つの条件 (i), (ii), (iii) を満たす三角形 PAB，およびこの三角形と辺 AB を共有する長方形 ABCD を考える。

(i)　PA $= a$，PB $= b$，$\angle$APB $= \theta$ である。

(ii)　2 点 C，D はともに直線 AB に関して点 P と反対側にある。

(iii)　AB $= 3$ AD である。

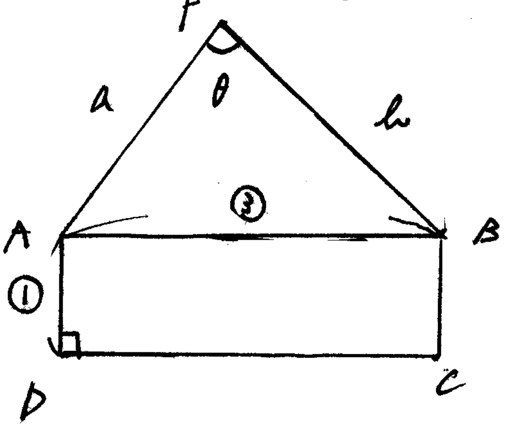
三角形 PAB の面積と長方形 ABCD の面積の和を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　辺 AB の長さを a, b, θ を用いて表せ。

(2)　S を a, b, θ を用いて表せ。

(3)　$a = 16$, $b = 25$, $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$ とするとき，S を求めよ。また，点 P と直線 AB の距離を求めよ。

[2020年　広島大学　文型　改]



(1) 余弦定理より

$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

よって

$\boxed{AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}}$

(2) $\triangle PAB$ の面積は

$\frac{1}{2} \times a \times b \times \sin\theta = \frac{1}{2}ab\sin\theta$

長方形 ABCD の面積は

$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta} \times \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$

$= \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)$

よって

$\boxed{S = \frac{1}{2}ab\sin\theta + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)}$

(3) $0° < \theta < 180°$，$\cos\theta = -\frac{4}{5}$ より

$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \frac{3}{5}$

また

$AB = \sqrt{16^2 + 25^2 - 2 \times 16 \times 25 \times \left(-\frac{4}{5}\right)}$

$= \sqrt{1521}$

$= 39$

下1桁が2乗して 1 となるのは 01 or 09 のみ。そこから推測していく

よって

$S = \frac{1}{2} \times 16 \times 25 + \frac{1}{3} \times 39^2$

$= \boxed{627}$

また，$\triangle PAB$ の面積は 120 より
点 P と直線 AB のきょりを h とすると
$\frac{1}{2} \times AB \times h = 120$

$\therefore h = \frac{120 \times 2}{39} = \boxed{\frac{80}{13}}$