大学入試問題に挑戦　No. 1

m, p, q を実数とする。二つの関数

$$f(x)=\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x, \quad g(x)=\frac{1}{6}(x-p)^2+q$$

を考える。座標平面上の放物線

$$C_1: y=f(x), \quad C_2: y=g(x)$$

および直線 $l: y=mx$ について，次の二つの条件 (i), (ii) が成り立つとする。

(i)　直線 l は放物線 C_1 に接している。

(ii)　直線 l は放物線 C_2 に接している。

直線 l と放物線 C_2 の接点を A とする。次の問いに答えよ。

(1)　m の値を求めよ。

(2)　q を p を用いて表せ。また，点 A の座標を p を用いて表せ。

(3)　$p \neq 1$ とする。放物線 C_1 と放物線 C_2 の二つの共有点の x 座標を p を用いて表せ。

［2020年　広島大学　文型　改］

文字が多くでてきますが，落ちついて整理すれば解けるはず!!

$m,\ p,\ q$ を実数とする。二つの関数

$$f(x)=\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x,\quad g(x)=\frac{1}{6}(x-p)^2+q$$

を考える。座標平面上の放物線

$$C_1 : y=f(x),\quad C_2 : y=g(x)$$

および直線 $l : y=mx$ について，次の二つの条件 (i), (ii) が成り立つとする。

(i)　直線 l は放物線 C_1 に接している。

(ii)　直線 l は放物線 C_2 に接している。

直線 l と放物線 C_2 の接点を A とする。次の問いに答えよ。

(1)　m の値を求めよ。

(2)　q を p を用いて表せ。また，点 A の座標を p を用いて表せ。

(3)　$p \neq 1$ とする。放物線 C_1 と放物線 C_2 の二つの共有点の x 座標を p を用いて表せ。

[2020年　広島大学　文型　改]

$ax^2+bx+c=0$ が重解をもつとき．その解は，

$x=-\frac{b}{2a}$

もちろん，$q=\frac{1}{3}p+\frac{1}{6}$ を(#)に代入して，

$x^2-2(p+1)x+p^2+2p+1=0$

$x^2-2(p+1)x+(p+1)^2=0$

$(x-(p+1))^2=0$

$x=p+1$ でもよい

(1) (i)より．

$\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x=mx$

は重解をもつ．

∴ $2x^2+(-3m+1)x=0$

判別式をDとすると．

$D=(-3m+1)^2-4\times2\times0$

$=(-3m+1)^2$

∴ $(-3m+1)^2=0$　∴ $\boxed{m=\frac{1}{3}}$

(2) (ii)より．

$\frac{1}{6}(x-p)^2+q=\frac{1}{3}x$

は重解をもつ．

∴ $x^2-2(p+1)x+p^2+6q=0$ —(#)

判別式をDとすると．

$D/4=(p+1)^2-1\times(p^2+6q)$

$=2p-6q+1$

∴ $2p-6q+1=0$

よって $\boxed{q=\frac{1}{3}p+\frac{1}{6}}$

点Aのx座標は(#)の解より．

重解は，$x=-\frac{-2(p+1)}{2\times1}=p+1$，

点Aは l 上にあるので．

$y=\frac{1}{3}(p+1)$．

よって　$\boxed{A\left(p+1,\ \frac{p+1}{3}\right)}$

(3) $\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x=\frac{1}{6}(x-p)^2+\frac{1}{3}p+\frac{1}{6}$

$3x^2+2(p+1)x-(p+1)^2=0$

$(3x-(p+1))(x+(p+1))=0$

∴ $x=\frac{p+1}{3},\ -p-1$．

$\boxed{\frac{p+1}{3},\ -p-1}$

文字式の整理は．

□x^2+○x+△

それぞれで因数分解した方が役に立つ