大学入試問題に挑戦　No. 4

n を 2 以上の自然数とする。 1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い，出た目を順に X_1, X_2, $\cdots$, X_n とする。

(1)　X_1, X_2, $\cdots$, X_n の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ。

(2)　X_1, X_2, $\cdots$, X_n の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ。

(3)　X_1, X_2, $\cdots$, X_n の最小公倍数が 20 となる確率を n の式で表せ。

[2020年　北海道大学　理型]

大学入試問題に挑戦　No. 4

n を2以上の自然数とする。1個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い，出た目を順に $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする。

(1)　$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の最大公約数が3となる確率を n の式で表せ。

(2)　$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の最大公約数が1となる確率を n の式で表せ。

(3)　$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の最小公倍数が20となる確率を n の式で表せ。

[2020年　北海道大学　理型]

(1) さいころの目がでるのは 6^n 通り

最大公約数が3となるのは、

n回すべて 3または6の目が出るとき。

ただし、n回すべて6の目ではいけない。

3または6の目がn回でる。

よって

$2^n - 1$ 通り

6の目だけがでる。

$$\boxed{\dfrac{2^n-1}{6^n}}$$

(2) 最大公約数のとり得る値は、

1、2、3、4、5、6

のいずれか。

よって最大公約数が1とならないのは、

最大公約数が2、3、4、5、6のとき。

考えやすいものから取りかかる

(i) 6のとき。

すべて6の目より　1通り。

(ii) 4のとき

すべて4の目より　1通り

(iii) 2のとき

すべて、2または4または6の目。

ただし、n回4だけ、n回6だけはいけない。

よって　$3^n - 2$。

(i) (ii) (iii) はまとめて考えることもできる。

つまり"最大公約数が偶数"となるとき。

という場合分けの下。

すべての目が偶数の目のときなので。

3^n。

(iv) 5のとき。

すべて5の目より　1通り。

(v) 3のとき

(1)より　$2^n - 1$。

以上より求めるものは、

$$1 - \frac{1+1+3^n-2+1+2^n-1}{6^n}$$

$$= \boxed{\frac{6^n-3^n-2^n}{6^n}}$$

(別解)

最大公約数が1となるのは、

(i) 少なくとも1または5が1回以上でる

ただしn回5だけはいけない

$6^n - 4^n - 1$

(ii) Aを2,4,6の目がでる、Bを3,6の目がでるとしたとき、n回AとBのいずれかがでる。

ただし、Aだけ、Bだけはダメ。

$4^n - (3^n + 2^n - 1)$

でもよい、難しいけどね。

(3) 最小公倍数が20となるのは，

1，2，4，5

のいずれかが出て，

少なくとも1回は，4と5の目がでるとき．

(i) 4の目が出ないとき

1，2，5の目のいずれかがでるので，

3^n

(ii) 5の目が出ないとき，

同様に

3^n

(iii) 4と5の目がでないとき，

1，2の目のいずれかがでるので，

2^n

よって，1，2，4，5の目のうち，

4と5の目が全くでないのは，

$3^n+3^n-2^n$

以上より求めるものは，

$$\frac{4^n-(2\cdot3^n-2^n)}{6^n}$$

$$=\boxed{\frac{4^n-2\cdot3^n+2^n}{6^n}}$$

4と5の目
どちらも出ない場合が
重複してる．